Ein Blick ----- Einblick

Wie wir in „Mathematik für alle“ die Welt der Mathematik sehen

Folie 1

a sight in ----- an insight

How we see the world of mathematics in „mathematics für everybody“.

Folie 2

Ein Weg ist gangbar vorbereitet

Wie wir in „Mathematik für alle“ die Welt der Mathematik sehen

Folie 3

A Viable Path is Prepared.

How we see the world of mathematics in „mathematics für everybody“.

Folie 4

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Exponentialfunktion

Exp-fkt

$$f(x) = k^x$$

$k > 0,\ Def = \mathbb{R}$

$k = 0,\ Def = \mathbb{R}^+$

Basis k >1

Basis k mit 0<k <1

für Basis k <0 ist f nicht definiert

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Exponential Functions

Exp-fkt

$$f(x) = k^x$$

$k > 0,\ def = \mathbb{R}$

$k = 0,\ def = \mathbb{R}^+$

base k >1

basis k with 0<k <1

for basis k <0 there is no definition for f

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

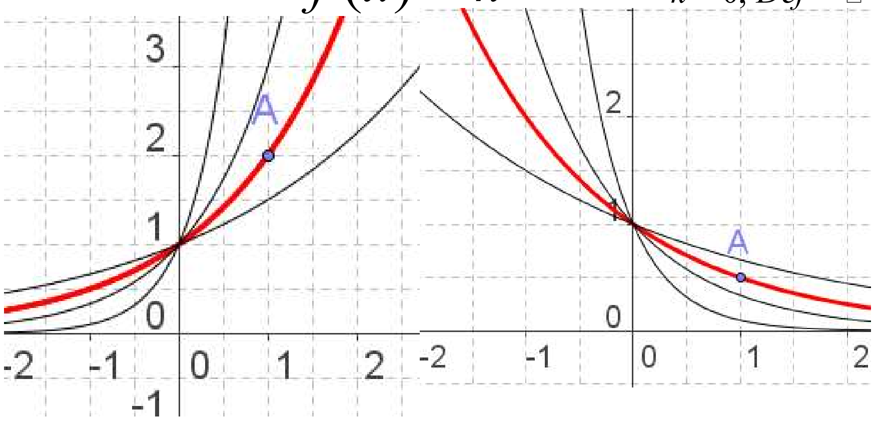
Exponentialfunktion

Exp-fkt

$$f(x) = k^x$$

$k > 0,\ Def = \mathbb{R}$

$k = 0,\ Def = \mathbb{R}^+$



Basis k >1

Basis k mit 0<k <1

für Basis k <0 ist f nicht definiert

Folie 7

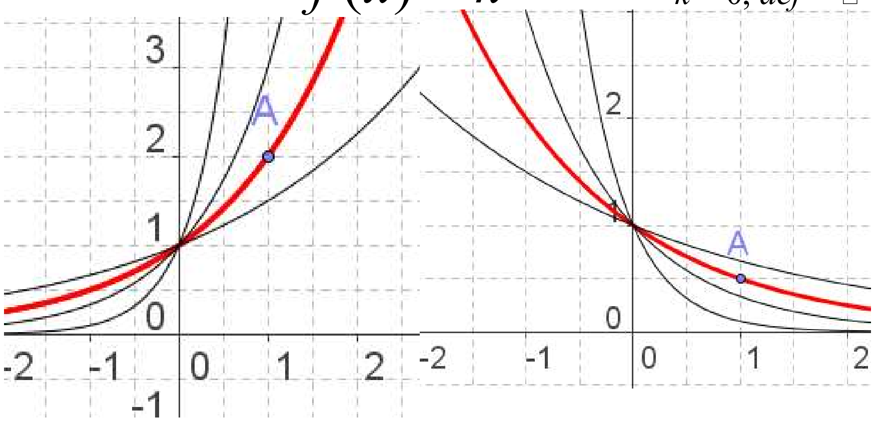
Exponential Functions

Exp-fkt

$$f(x) = k^x$$

$k > 0,\ def = \mathbb{R}$

$k = 0,\ def = \mathbb{R}^+$



base k >1

base k with 0<k <1

for basis k <0 there is no definition for f

Folie 8

e-Funktion, das halbe Geheimnis

hin

$$f(x) = k^x \qquad f(x) = e^x$$

Folie 9

E-function, the Half Mystery

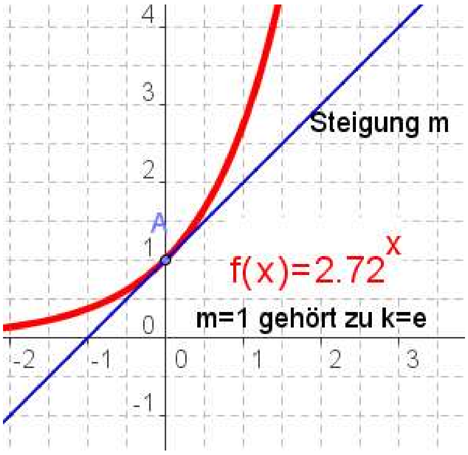
hin

$$f(x) = k^x \qquad f(x) = e^x$$

Folie 10

e-Funktion, das halbe Geheimnis

$$f(x) = k^x$$

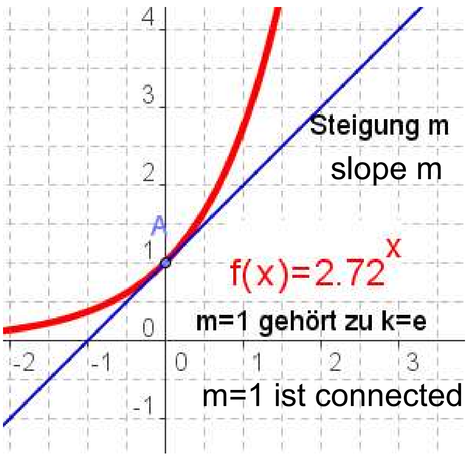


die e-Funktion ist diejenige Exponentialfunktion, die in (0/1) die Steigung 1 hat.

$$f(x) = e^x$$

E-function, the Half Mystery

$$f(x) = k^x$$



m=1 ist connected with k=e

the one and only e-function is the exponential function who has in the point (0/1) the slope 1.

$$f(x) = e^x$$

Die Welt der Umkehrfunktionen

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \ln(x)$$

$$y = \arcsin(x)$$

.....

$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = \log_a(x)$$

Folie 13

The World of the Inverse Functions

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \ln(x)$$

$$y = \arcsin(x)$$

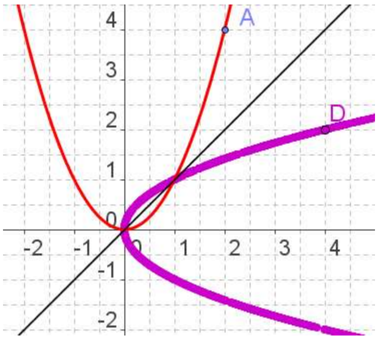
.....

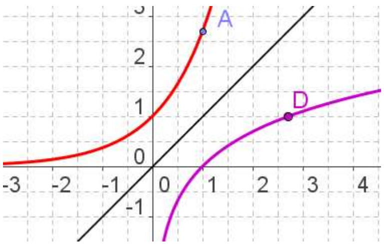
$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = \log_a(x)$$

Folie 14

Umkehr-Fragen
Umkehr-Funktionen
Umkehr-Relationen

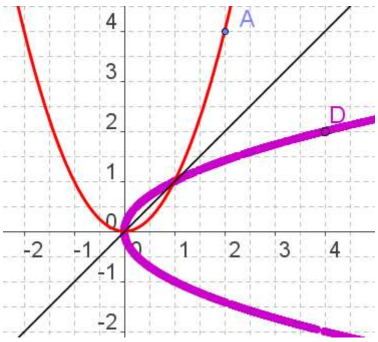


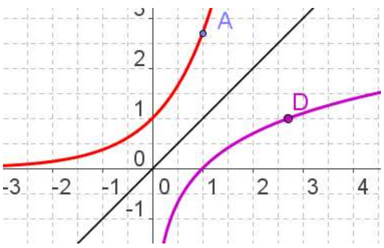


Folie 15

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

inverse questions
inverse functions
inverse relations





Folie 16

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

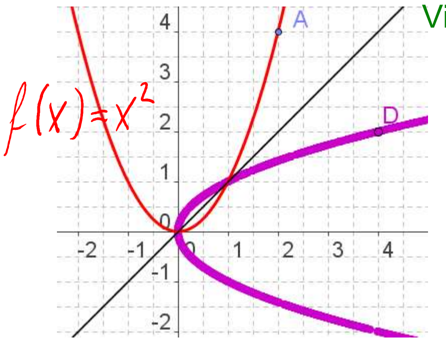
Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4



Visualisierung der Umkehrfrage:

Folie 17

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

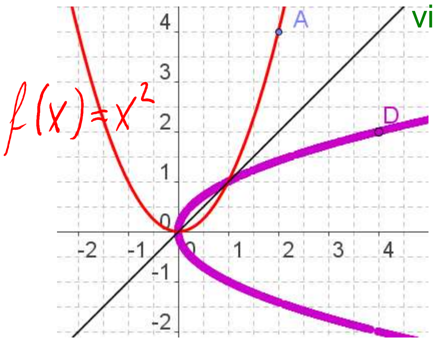
inverse questions, inverse functions, inverse relations

question: Which is the value of f at abscissa 2?

answer: 4 is the value, f(2)=4

inverse question: at which postions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, f(+2)=4 und f(-2)=4



visualisation of the inverse question:

Folie 18

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

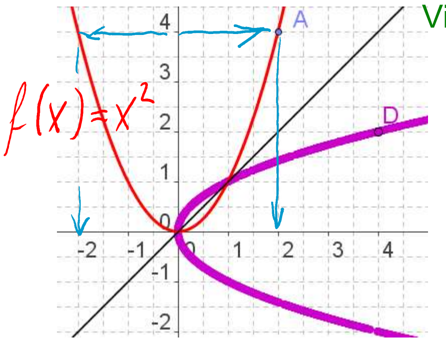
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Umkehrfkt

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4



Visualisierung der Umkehrfrage:

Gehe von der y-Achse zur Kurve und dann zur x-Achse

Folie 19

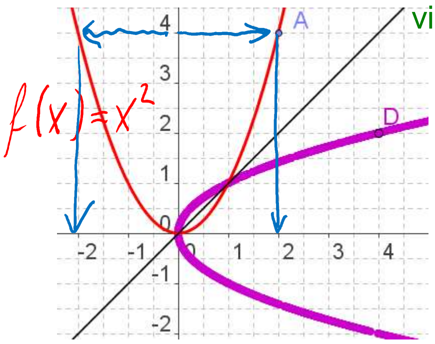
inverse questions, inverse functions, inverse relations

question: Which is the value of f at abscissa 2?

answer: 4 is the value, f(2)=4

inverse question: at which postions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, f(+2)=4 und f(-2)=4



visualisation of the inverse question:

draw from the y-axis to the curve and then draw to the x-axis

Folie 20

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

Umkehrfkt

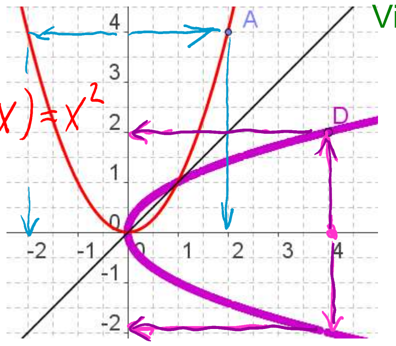
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, $f(2)=4$

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

$f(x)=x^2$



Visualisierung der Umkehrfrage:

I Gehe von der y-Achse zur Kurve und dann zur x-Achse

oder

II Gehe von der x-Achse zum Graphen der an der Winkelhalbierenden gespiegelten Kurve und dann zur y-Achse. Es ist die Umkehrrelation.

oder III $x=y^2$

III Dies ist nur eine Relation, **keine** Funktion. Der Wert ist nicht eindeutig.

inverse questions, inverse functions, inverse relations

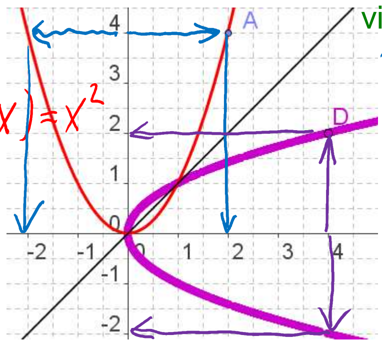
question: Which is the value of f at abscissa 2?

answer: 4 is the value, $f(2)=4$

inverse question: at which postions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

$f(x)=x^2$



visualisation of the inverse question:

I draw from the y-axis to the curve and then draw to the x-axis

or

II at first reflect the curve with the angle bisection line y=x then draw from the x-axis to this curve and than draw to the y-axis

or

III $x=y^2$

III This is only a relation, not an equation of a function, the y-value is not unique.

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

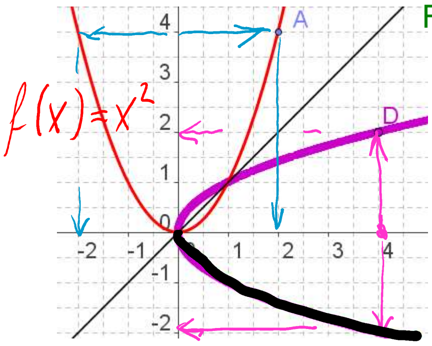
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Umkehrfkt

Antwort: 4 ist der Wert, f(2)=4

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, f(+2)=4 und f(-2)=4



Formalisierung der Umkehrfrage:

f^{-1} = **Umkehrfunktion von** f

Bilde (hier stückweise) die Umkehrfunktion

$g(4)=\sqrt{4}$
$=2$

$$g(x)=\sqrt{x}$$

$$h(x)=-\sqrt{x}$$

$h(4)=-2$

Folie 23

inverse questions, inverse functions, inverse relations

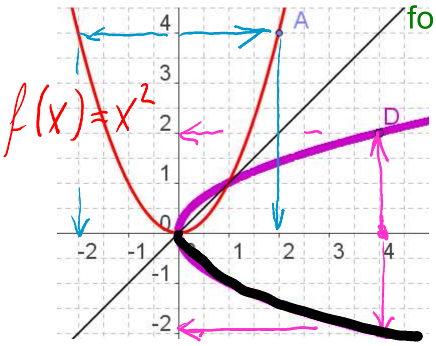
question: Which is the value of f at abscissa 2?

inverse fkt

answer: 4 is the value, f(2)=4

inverse question: at which postions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, f(+2)=4 und f(-2)=4



formalisation of the inverse question

f^{-1} = **inverse function of** f

build the inverse function

it is here only piecewise possible

$$g(x)=\sqrt{x}$$

$g(4)=\sqrt{4}$
$=2$

$$h(x)=-\sqrt{x}$$

$h(4)=-2$

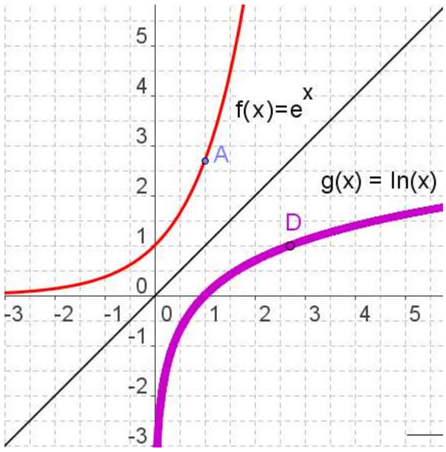
Folie 24

die Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

Umkehrfkt

Eulersche
e-Funktion



der natürliche
Logarithmus

die ln-Funktion

der ln

Folie 25

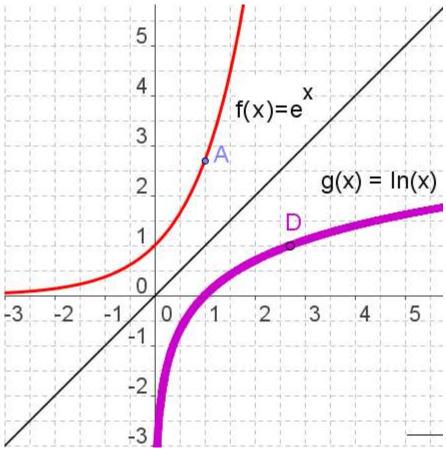
the one and only

Exponential Function

$$f(x) = e^x$$

Umkehrfkt

Euler's
e-Funktion



the natural
logarithm

the ln-function

the ln

Folie 26

die Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$ $\quad e^{\ln(x)} = x$

Umkehrfkt

$\ln(e^x) = x$

der natürliche Logarithmus

die ln-Funktion

der ln

$f^{-1}(x) = \ln(x)$

$\ln(e) = 1$

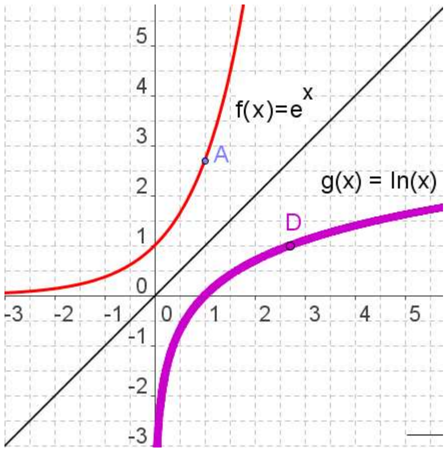
$\ln(1) = 0$

Eulersche e-Funktion

f

$f(1) = e^1 = e$

$f(0) = e^0 = 1$



Folie 27

the one and only Exponential Function

$f(x) = e^x$ $\quad e^{\ln(x)} = x$

Umkehrfkt

$\ln(e^x) = x$

the natural logarithm

the ln-function

the ln

$f^{-1}(x) = \ln(x)$

$\ln(e) = 1$

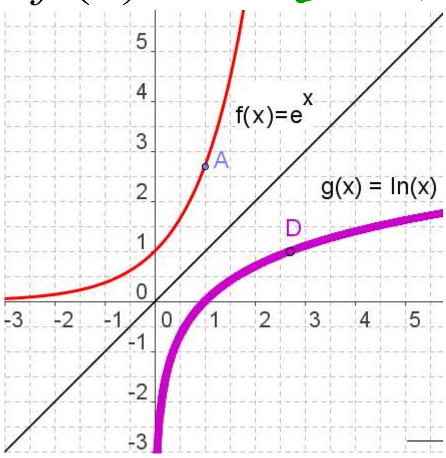
$\ln(1) = 0$

Euler's e-Funktion

f

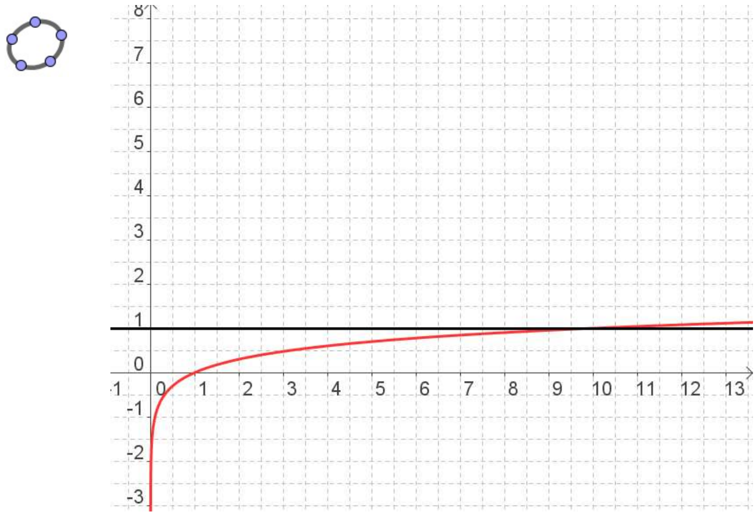
$f(1) = e^1 = e$

$f(0) = e^0 = 1$



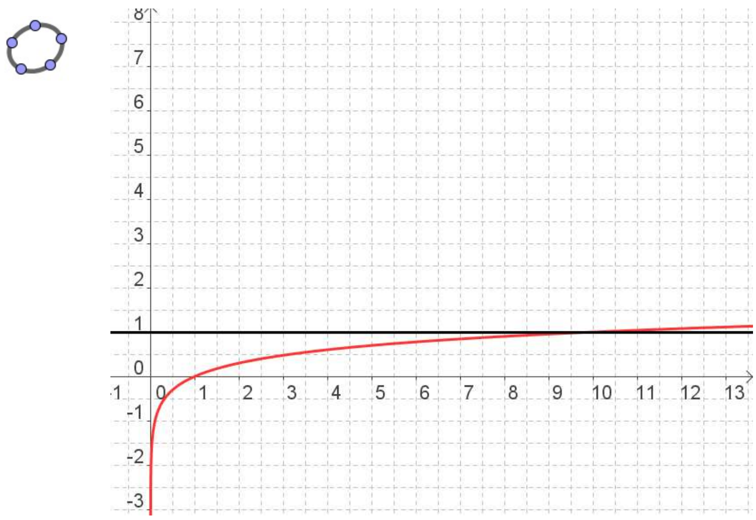
Folie 28

Wie langsam wächst der Logarithmus?



Folie 29

How Slow the Logarithm is Growing?



Folie 30

Umkehrfkt

Jede Funktion frisst ihre Umkehrfunktion

für $x>0$

$y = \sqrt{x}$

$y = \ln(x)$

$y = \arcsin(x)$

$y = \sqrt[n]{x}$

für Hauptwerte

$y = \log_a(x)$

Folie 31

Umkehrfkt

Every Function Feeds her Inverse Function

für $x>0$

$y = \sqrt{x}$

$y = \ln(x)$

$y = \arcsin(x)$

$y = \sqrt[n]{x}$

für Hauptwerte

$y = \log_a(x)$

Folie 32

Jeder Funktion frisst ihre Umkehrfunktion

für $x>0$

$y=\sqrt{x}$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$(\sqrt{x})^2=x$

$y=\arcsin(x)$

$\sin(\arcsin(x))=x$

$\arcsin(\sin(x))=x$

für Hauptwerte

$y=\ln(x)$

$\ln(e^x)=x$

$e^{\ln x}=x$

$y=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x^n}=|x|$

$y=\log_a(x)$

Folie 33

Every Function Feeds her Inverse Function

für $x>0$

$y=\sqrt{x}$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$(\sqrt{x})^2=x$

$y=\arcsin(x)$

$\sin(\arcsin(x))=x$

$\arcsin(\sin(x))=x$

für main values

$y=\ln(x)$

$\ln(e^x)=x$

$e^{\ln x}=x$

$y=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x^n}=|x|$

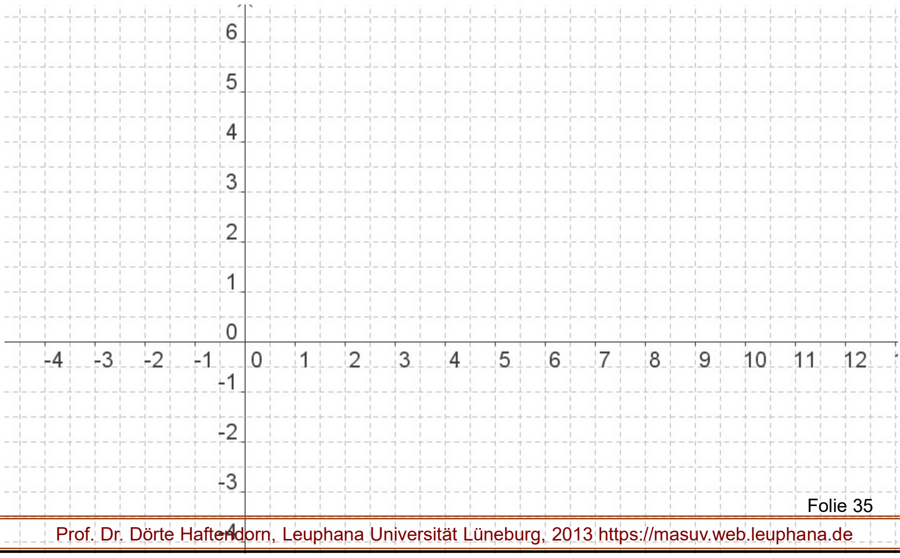
$y=\log_a(x)$

Folie 34

leer

Übung mit Funktionsgraphen

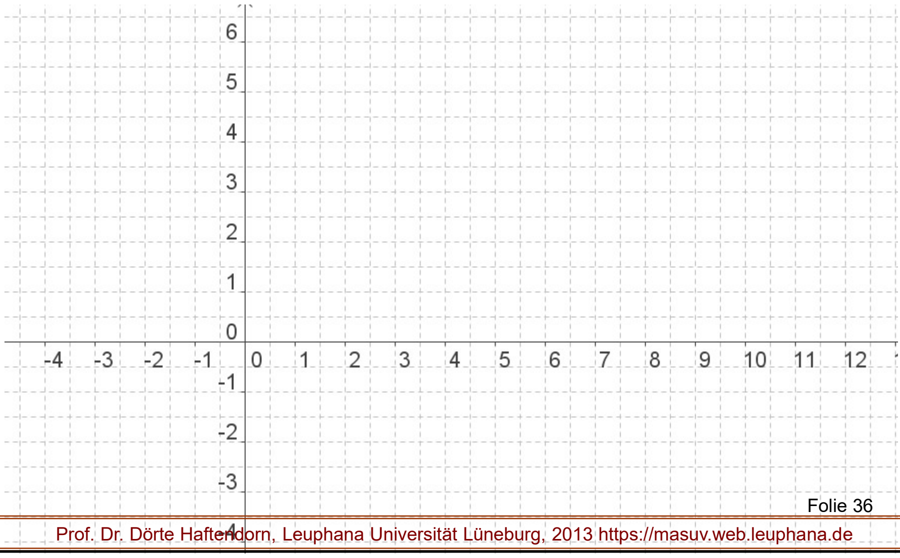
$y = e^{x}$ $\quad y = e^{-x}$ $\quad y = e^{x-2}$ $\quad y = -e^{x-3} - 1$ $\quad y = \ln(x-6)$



leer

Practise with Graphs of Functions

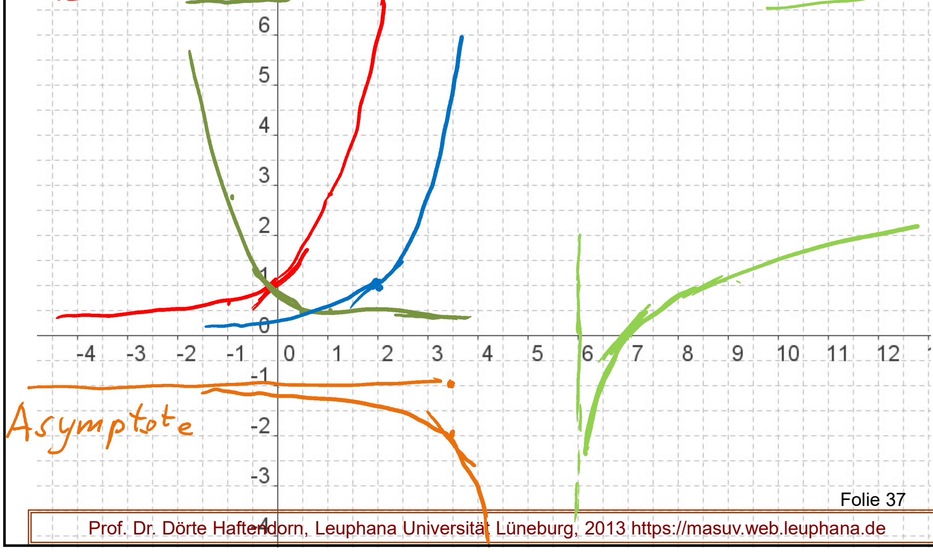
$y = e^{x}$ $\quad y = e^{-x}$ $\quad y = e^{x-2}$ $\quad y = -e^{x-3} - 1$ $\quad y = \ln(x-6)$



Übung mit Funktionsgraphen

leer

$y=e^{x}$ $\quad y=e^{-x}$ $\quad y=e^{x-2}$ $\quad y=-e^{x-3}-1$ $\quad y=\ln(x-6)$

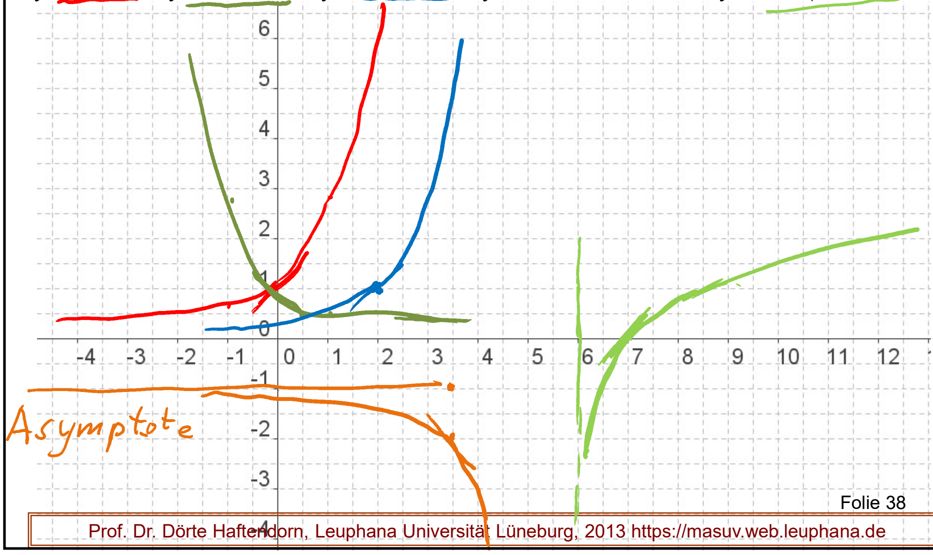


Folie 37

practise with graphs of functions

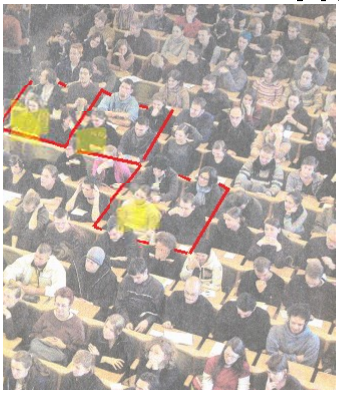
leer

$y=e^{x}$ $\quad y=e^{-x}$ $\quad y=e^{x-2}$ $\quad y=-e^{x-3}-1$ $\quad y=\ln(x-6)$

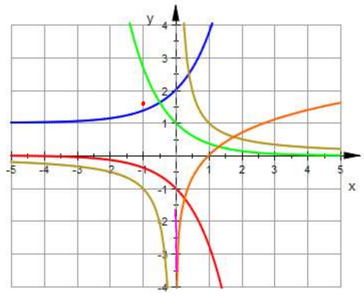


Folie 38

Vierer-Übung

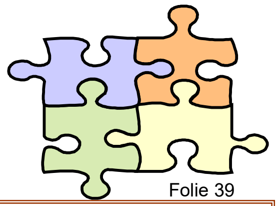


Erklären Sie sich hier die Gleichungen



Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Exponential-funktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten



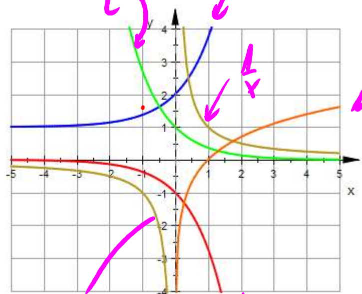
Folie 39

Vierer-Übung

Erklären Sie sich hier die Gleichungen

e^{-x} $y=e^x+1$

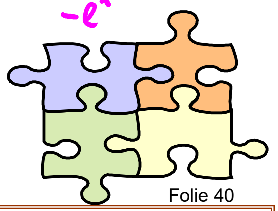
$\frac{1}{x}$ $\ln x$



$\frac{1}{x}$ $-e^x$

Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Exponential-funktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten



Folie 40

Funktionsgleichung y = f(x)

Grundtypen

GeoGebra

Potenzfunktion — **Wurzelfunktion**

$f(x) = x^k$ $\quad f^{-1} = g \quad$ $g(x) = \sqrt[k]{x}$

Exponentialfunktion — **Logarithmus**

$f(x) = e^x$ $\quad f^{-1} = g \quad$ $g(x) = \ln(x)$

Trigonometrische Funktion — **Arcus-Funktion**

$f(x) = \sin(x)$ $\quad f^{-1} = g \quad$ $g(x) = \arcsin(x) = \mathrm{INV}\sin(x)$

Folie 41

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Equation of a Function y = f(x)

main types

GeoGebra

power function — **root function**

$f(x) = x^k$ $\quad f^{-1} = g \quad$ $g(x) = \sqrt[k]{x}$

exponential function — **logarithm**

$f(x) = e^x$ $\quad f^{-1} = g \quad$ $g(x) = \ln(x)$

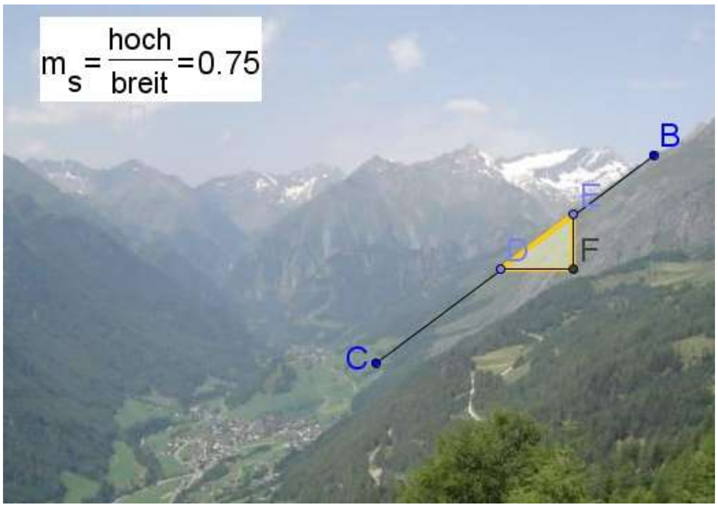
trigonometric function — **arc function**

$f(x) = \sin(x)$ $\quad f^{-1} = g \quad$ $g(x) = \arcsin(x) = \mathrm{INV}\sin(x)$

Folie 42

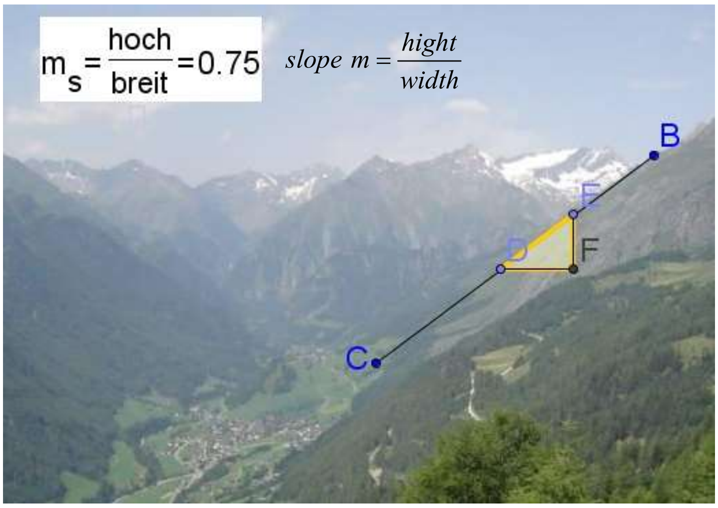
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Differentiale



Folie 43

Differentials



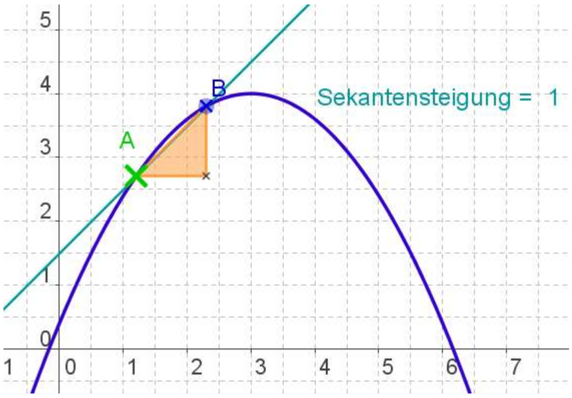
Folie 44

Parabel

Differentiale

Sekanten

Nur zur Vertiefung



Folie 45

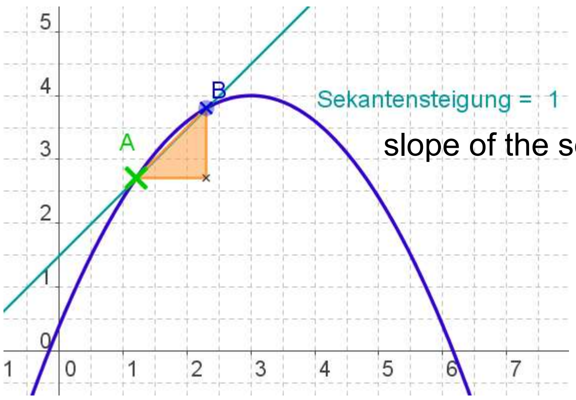
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Parabola

Differentials

secants

only for deepening



slope of the secant line

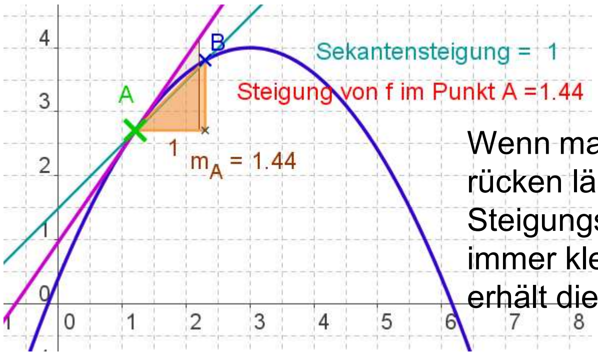
Folie 46

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Das Differential

Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:

welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?



Wenn man B an A heran-rücken lässt, wird das Steigungsdreieck der Sekante immer kleiner und man erhält die Tangente in A.

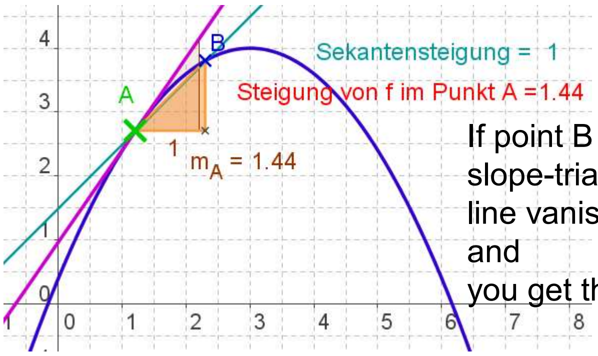
$$m_A = \lim_{x \to a} m_{sekante}$$

Folie 47

The Differential

At the end we search for every point on a function:

which slope has the function in that point?



slope of f in point A

If point B goes to point A, the slope-triangle of the secant line vanish more and more and you get the tangent line in A.

$$m_A = \lim_{x \to a} m_{\sec ant}$$

Folie 48

Das Differential

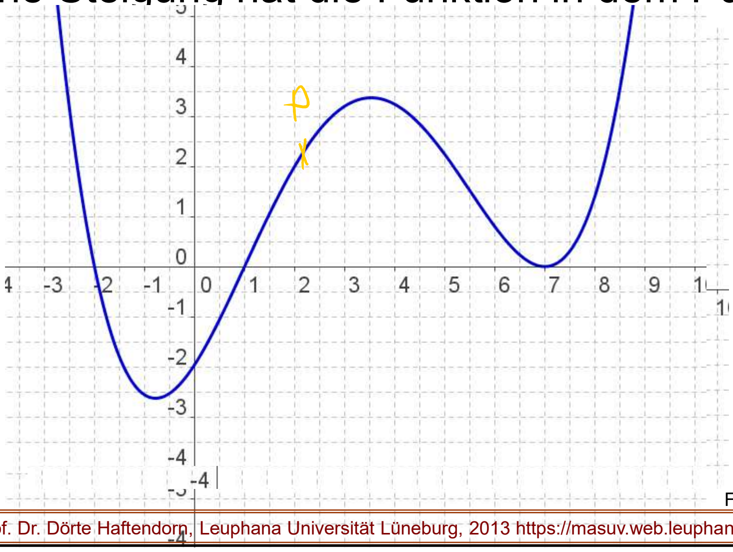
Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:

welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier



Folie 49

The Differential

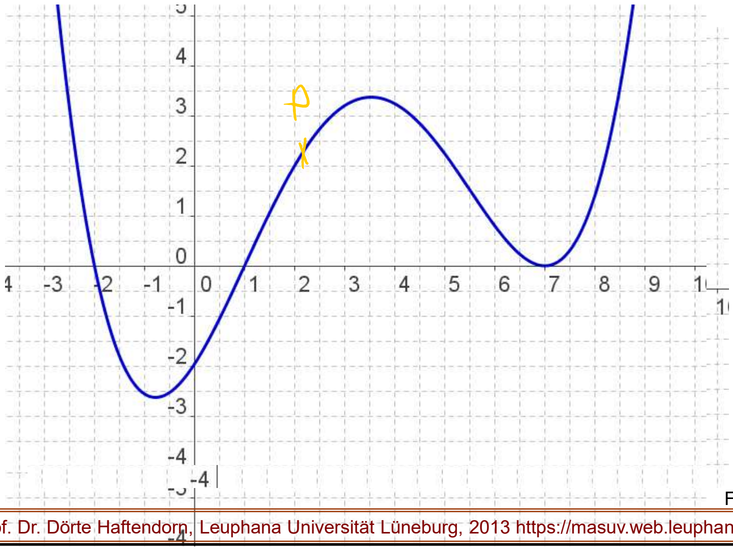
At the end we seach for every point on a function:

which slope has the function in that point?

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier



Folie 50

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Das Differential

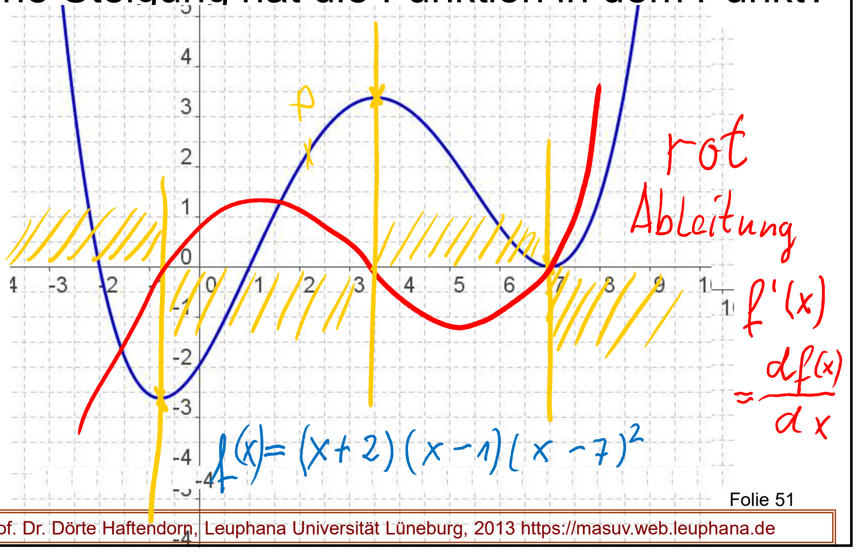
Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:

Fahrrad, Bspl 2

welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?

Fahrrad pur

Fahrrad hier



Folie 51

The Differential

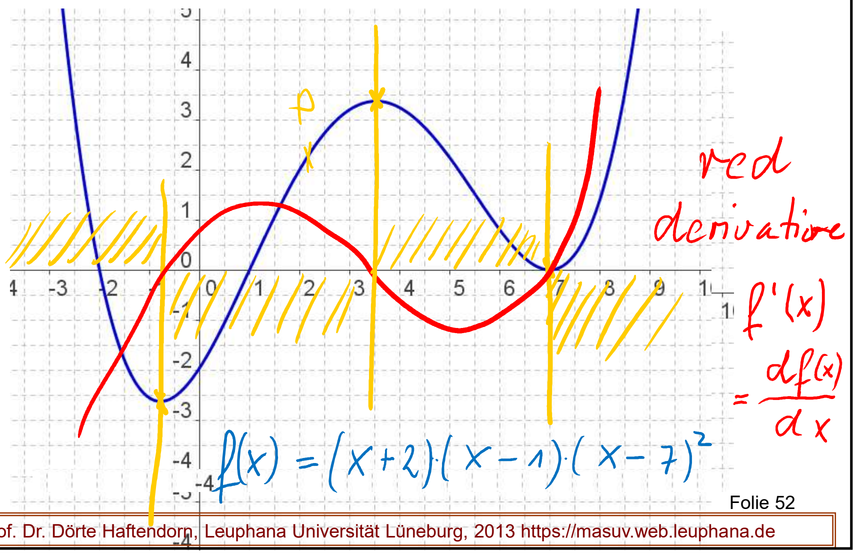
At the end we seach for every point on a function:

which slope has the function in that point?

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier



Folie 52

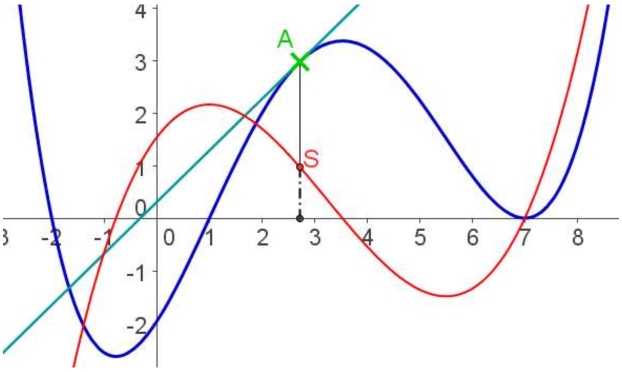
diff

Die Ableitung f ‘ ist die Funktion, die für jedes x die Steigung der Funktion f angibt.

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier



Die rote Funktion ist also die Ableitung von der blauen.

Folie 53

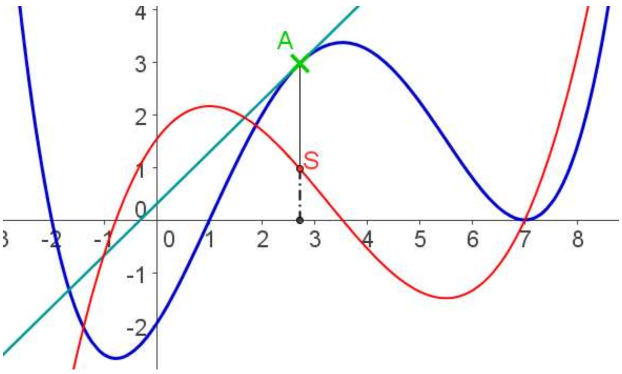
diff

The derivative f ‘ is the function, which shows the slope of the given function for every position x

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier

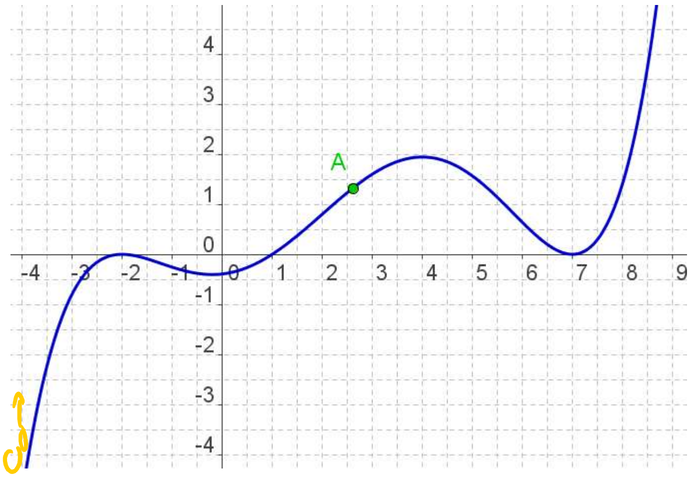


Now: the red function is the derivative of the blue function.

Folie 54

Übung 2 mit Funktionsgraphen

Fahrrad,
Bspl 2

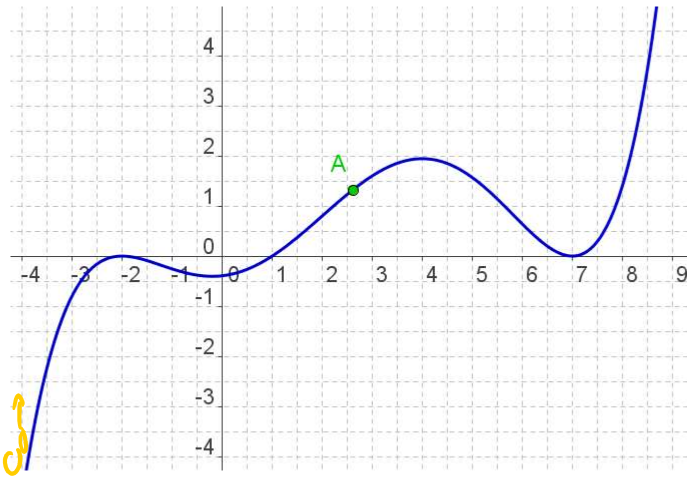


Folie 55

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Practice 2 with Graphs of Functions

Fahrrad,
Bspl 2

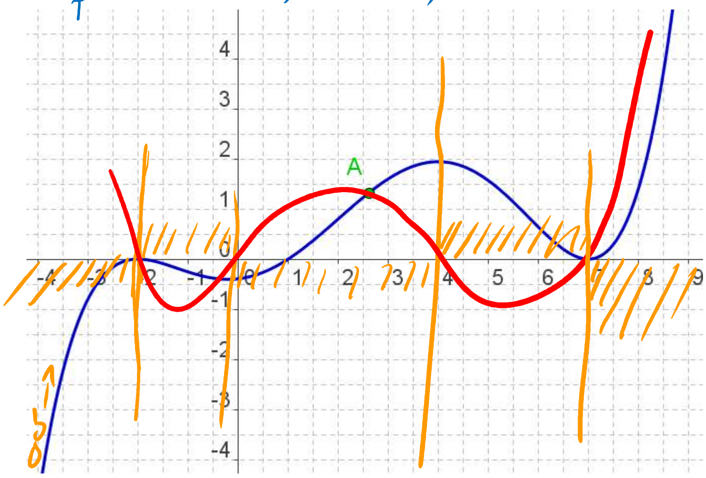


Folie 56

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Übung 2 mit Funktionsgraphen

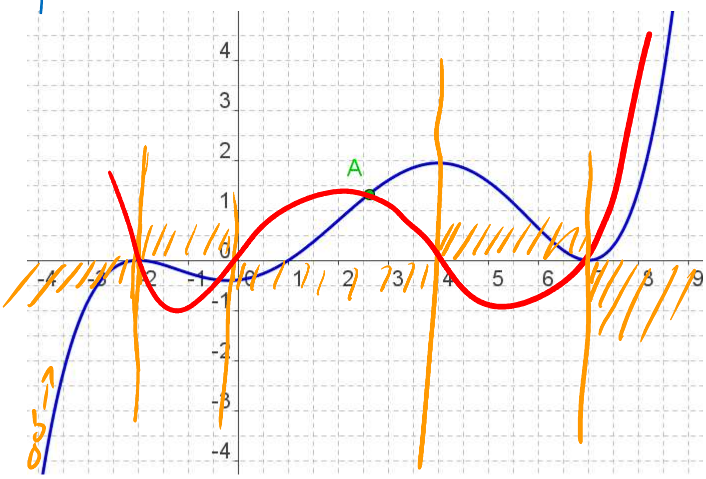
$f(x) = (x+2)^2 (x-1)(x-7)^2$



Folie 57

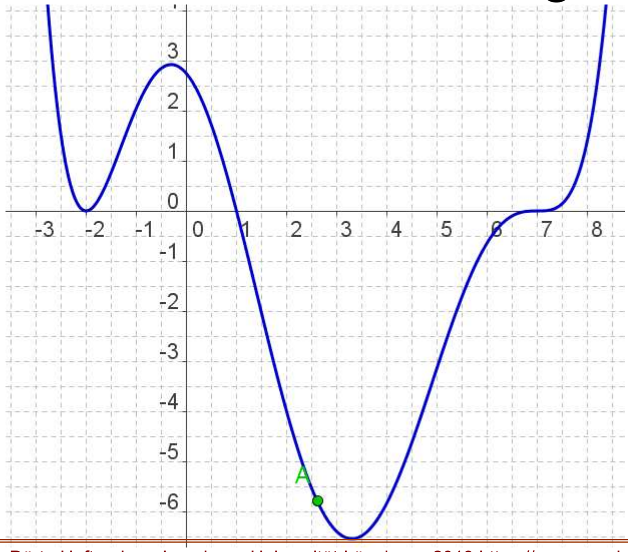
Practice 2 with Graphs of Functions

$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)(x-7)^2$



Folie 58

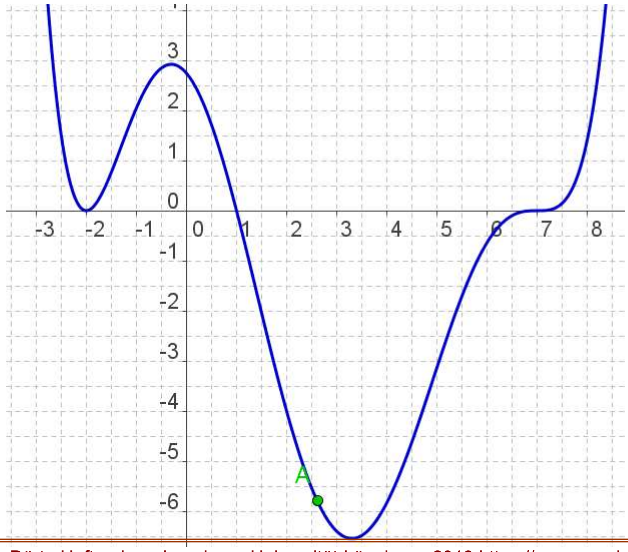
Übung 3 mit Funktionsgraphen und ihren Ableitungen



diff3

Folie 59

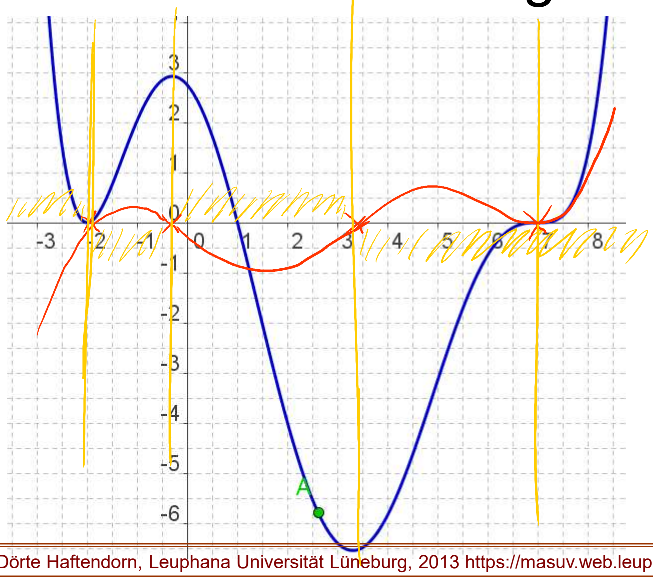
Practice 3 with Graphs of Functions and their Derivatives



diff3

Folie 60

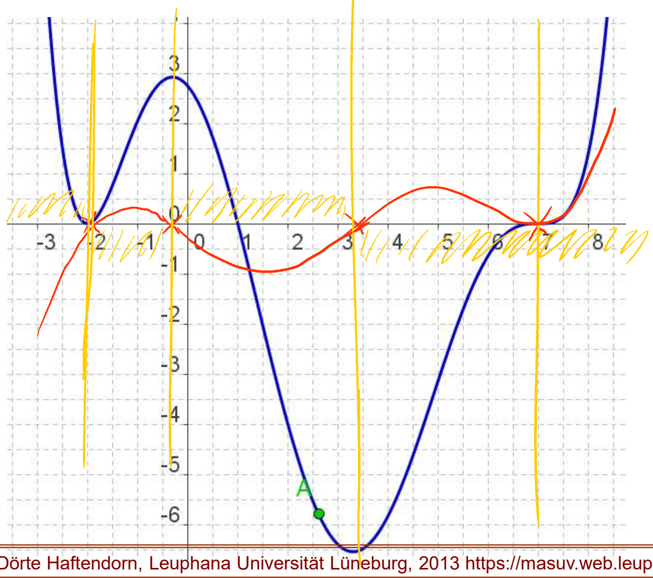
Übung 3 mit Funktionsgraphen und ihren Ableitungen



Folie 61

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

Practice 3 with Graphs of Functions and their Derivatives



Folie 62

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 https://masuv.web.leuphana.de

e-Funktion, das ganze Geheimnis

Teil 1 Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$

die e-Funktion ist diejenige Exponentialfunktion, die in (0/1) die Steigung 1 hat.

Folie 63

E-function, the Hole Mystery

Teil 1 Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$

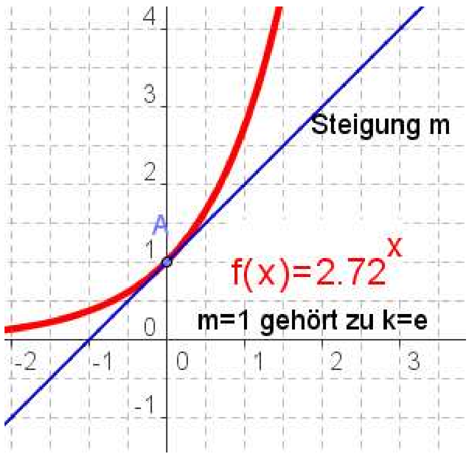
the one and only e-function is the exponential function who has in the point (0/1) the slope 1.

Folie 64

e-Funktion, das ganze Geheimnis

Teil 1 Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$



die e-Funktion ist diejenige Exponentialfunktion, die in (0/1) die Steigung 1 hat.

Die e-Funktion ist diejenige Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

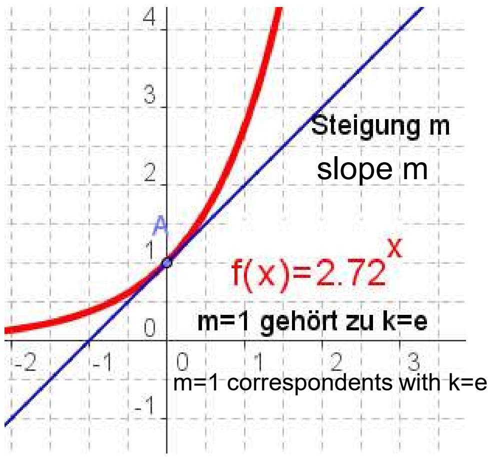
$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Folie 65

E-function, the Hole Mystery

Teil 1 Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$



the one and only e-function is the exponential function who has in the point (0/1) the slope 1.

The e-function ist the only function who is identic with ist derivative.

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

Folie 66