

Ein Blick ----- Einblick



Wie wir in „Mathematik für alle“ die Welt der Mathematik sehen

Folie 1

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

a sight in ----- an insight



How we see the world of mathematics in „mathematics für everybody“.

Folie 2

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Ein Weg ist gangbar vorbereitet



Wie wir in „Mathematik für alle“ die Welt der Mathematik sehen

Folie 3

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

A Viable Path is Prepared.



How we see the world of mathematics in „mathematics für everybody“.

Folie 4

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Exponentialfunktion

Exp-fkt



$$f(x) = k^x$$

$k > 0, \text{Def} = \mathbb{R}$

$k = 0, \text{Def} = \mathbb{R}^+$

Basis $k > 1$

für Basis $k < 0$ ist f nicht definiert

Basis k mit $0 < k < 1$

Folie 5

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Exponential Functions

Exp-fkt



$$f(x) = k^x$$

$k > 0, \text{def} = \mathbb{R}$

$k = 0, \text{def} = \mathbb{R}^+$

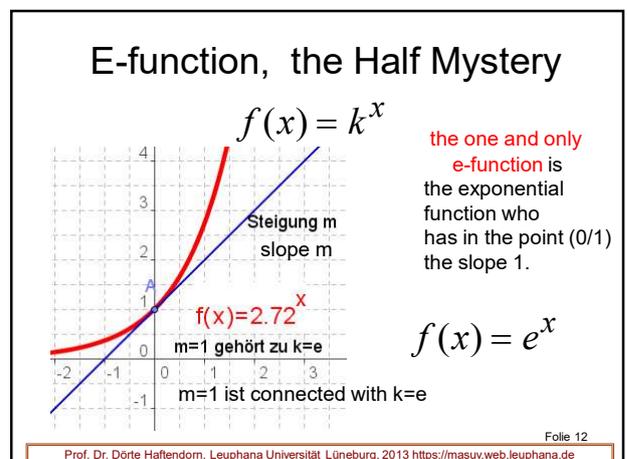
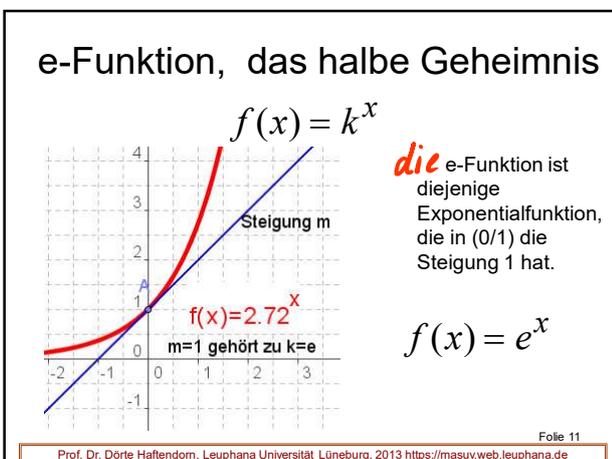
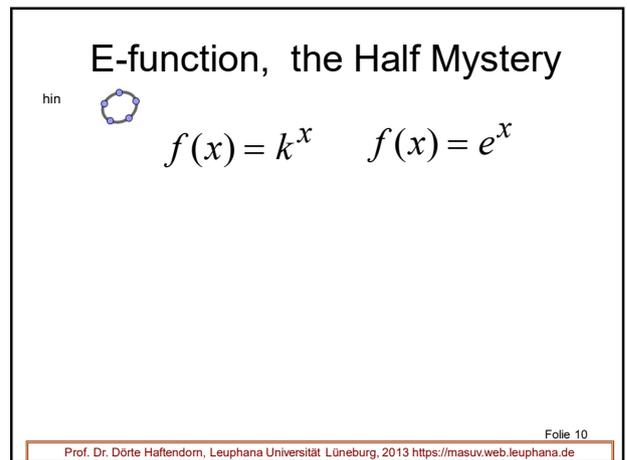
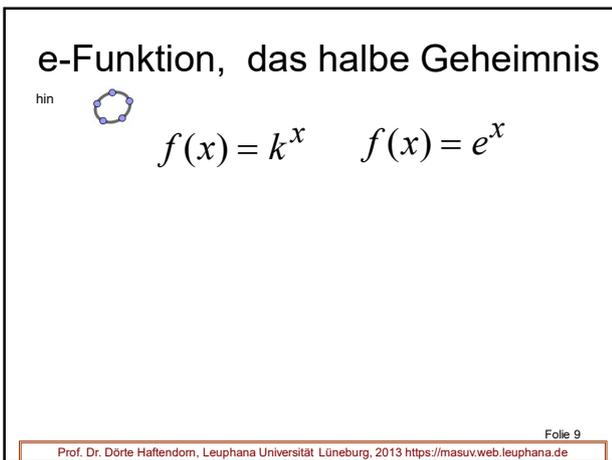
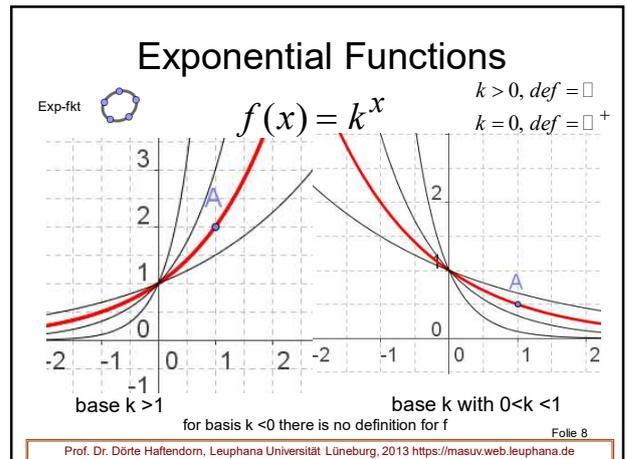
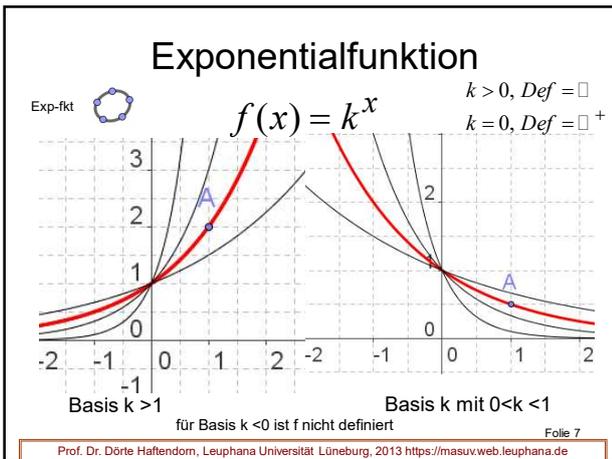
base $k > 1$

for basis $k < 0$ there is no definition for f

basis k with $0 < k < 1$

Folie 6

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>



Die Welt der Umkehrfunktionen



$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \ln(x)$$

$$y = \arcsin(x)$$

.....

$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = \log_a(x)$$

Folie 13

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

The World of the Inverse Functions



$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \ln(x)$$

$$y = \arcsin(x)$$

.....

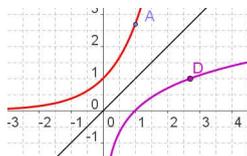
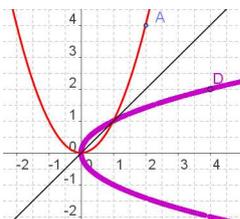
$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = \log_a(x)$$

Folie 14

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

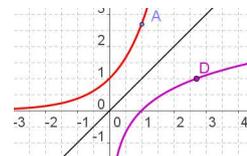
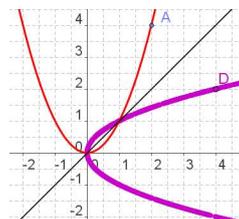
Umkehr-Fragen Umkehr-Funktionen Umkehr-Relationen



Folie 15

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

inverse questions inverse functions inverse relations



Folie 16

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

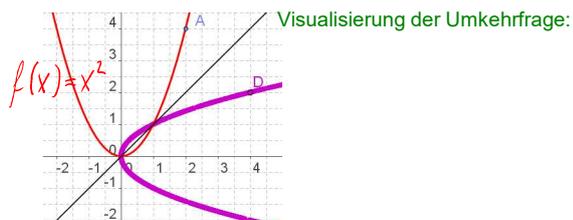
Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2?

Antwort: 4 ist der Wert, $f(2)=4$

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$



Folie 17

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

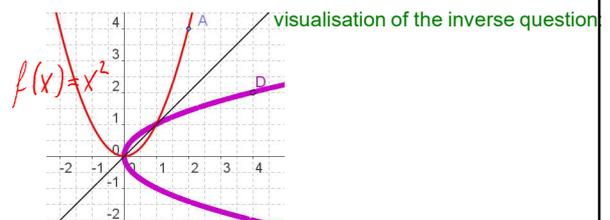
inverse questions, inverse functions, inverse relations

question: Which is the value of f at abscissa 2?

answer: 4 is the value, $f(2)=4$

inverse question: at which positions has f the value 4?

answer: +2 and -2 are the solutions, $f(+2)=4$ and $f(-2)=4$



Folie 18

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

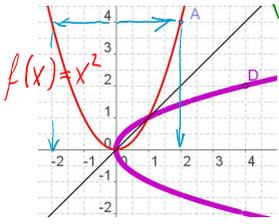
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2? 

Antwort: 4 ist der Wert, $f(2)=4$

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

Visualisierung der Umkehrfrage:



Gehe von der y-Achse zur Kurve und dann zur x-Achse

Folie 19
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

inverse questions, inverse functions, inverse relations

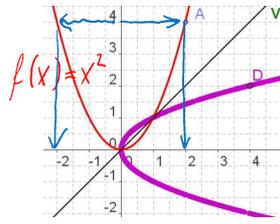
question: Which is the value of f at abscissa 2? 

answer: 4 is the value, $f(2)=4$

inverse question: at which positions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

visualisation of the inverse question:



draw from the y-axis to the curve and then draw to the x-axis

Folie 20
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

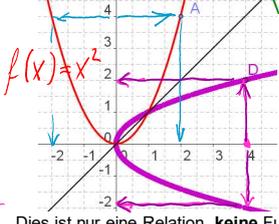
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2? 

Antwort: 4 ist der Wert, $f(2)=4$

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

Visualisierung der Umkehrfrage:



I Gehe von der y-Achse zur Kurve und dann zur x-Achse
II oder Gehe von der x-Achse zum Graphen der an der Winkelhalbierenden gespiegelten Kurve und dann zur y-Achse. Es ist die Umkehrrelation.
III oder $x=y^2$

III Dies ist nur eine Relation, **keine** Funktion. Der Wert ist nicht eindeutig.

Folie 21
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

inverse questions, inverse functions, inverse relations

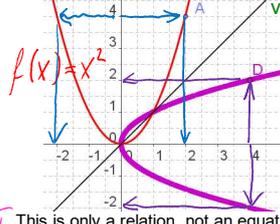
question: Which is the value of f at abscissa 2? 

answer: 4 is the value, $f(2)=4$

inverse question: at which positions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

visualisation of the inverse question:



I draw from the y-axis to the curve and then draw to the x-axis
II or at first reflect the curve with the angle bisection line $y=x$ then draw from the x-axis to this curve and then draw to the y-axis
III or $x=y^2$

III This is only a relation, not an equation of a function, the y-value is not unique.

Folie 22
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehr-Fragen, Umkehr-Funktionen, Umkehr-Relationen

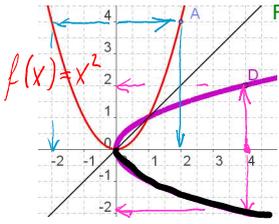
Frage: Welchen Wert hat f an der Stelle 2? 

Antwort: 4 ist der Wert, $f(2)=4$

Umkehrfrage: An welchen Stellen hat f hat den Wert 4?

Antwort: +2 und -2 sind Lösungen, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

Formalisierung der Umkehrfrage:



f^{-1} = Umkehrfunktion von f
Bilde (hier stückweise) die Umkehrfunktion
 $g(x) = \sqrt{x}$ $g(4) = \sqrt{4} = 2$
 $h(x) = -\sqrt{x}$ $h(4) = -2$

Folie 23
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

inverse questions, inverse functions, inverse relations

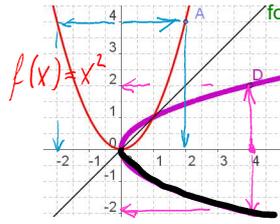
question: Which is the value of f at abscissa 2? 

answer: 4 is the value, $f(2)=4$

inverse question: at which positions has f the value 2?

answer: +2 and -2 are the solutions, $f(+2)=4$ und $f(-2)=4$

formalisation of the inverse question:



f^{-1} = inverse function of f
it is here only piecewise possible
build the inverse function
 $g(x) = \sqrt{x}$ $g(4) = \sqrt{4} = 2$
 $h(x) = -\sqrt{x}$ $h(4) = -2$

Folie 24
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

die Exponentialfunktion
 $f(x) = e^x$

Eulersche e-Funktion

der natürliche Logarithmus

die In-Funktion

der In

Folie 25
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

the one and only
 Exponential Function
 $f(x) = e^x$

Euler's e-Funktion

the natural logarithm

the In-function

the In

Folie 26
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

die Exponentialfunktion
 $f(x) = e^x$ $e^{\ln(x)} = x$

Eulersche e-Funktion
 f
 $f(1) = e^1 = e$
 $f(0) = e^0 = 1$

der natürliche Logarithmus

die In-Funktion
 der In
 $f^{-1}(x) = \ln(x)$
 $\ln(e) = 1$
 $\ln(1) = 0$

Folie 27
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

the one and only
 Exponential Function
 $f(x) = e^x$ $e^{\ln(x)} = x$

Euler's e-Funktion
 f
 $f(1) = e^1 = e$
 $f(0) = e^0 = 1$

the natural logarithm

the In-function
 the In
 $f^{-1}(x) = \ln(x)$
 $\ln(e) = 1$
 $\ln(1) = 0$

Folie 28
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Wie langsam wächst der Logarithmus?

Folie 29
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

How Slow the Logarithm is Growing?

Folie 30
 Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehrfkt

Jede Funktion frisst ihre Umkehrfunktion

für $x > 0$

$y = \sqrt{x}$ $y = \ln(x)$
 $y = \arcsin(x)$
 $y = \sqrt[n]{x}$

für Hauptwerte $y = \log_a(x)$

Folie 31

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehrfkt

Every Function Feeds her Inverse Function

für $x > 0$

$y = \sqrt{x}$ $y = \ln(x)$
 $y = \arcsin(x)$
 $y = \sqrt[n]{x}$

für Hauptwerte $y = \log_a(x)$

Folie 32

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehrfkt

Jeder Funktion frisst ihre Umkehrfunktion

für $x > 0$

$y = \sqrt{x}$ $y = \ln(x)$
 $\sqrt{x^2} = |x|$ $\ln(e^x) = x$
 $(\sqrt{x})^2 = x$ $e^{\ln x} = x$
 $y = \arcsin(x)$ $\sin(\arcsin(x)) = x$
 $\arcsin(\sin(x)) = x$ $\sin(\sin(x)) = x$
 $y = \sqrt[n]{x}$ $y = \log_a(x)$
 $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

für Hauptwerte

Folie 33

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Umkehrfkt

Every Function Feeds her Inverse Function

für $x > 0$

$y = \sqrt{x}$ $y = \ln(x)$
 $\sqrt{x^2} = |x|$ $\ln(e^x) = x$
 $(\sqrt{x})^2 = x$ $e^{\ln x} = x$
 $y = \arcsin(x)$ $\sin(\arcsin(x)) = x$
 $\arcsin(\sin(x)) = x$ $\sin(\sin(x)) = x$
 $y = \sqrt[n]{x}$ $y = \log_a(x)$
 $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

für main values

Folie 34

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

leer

Übung mit Funktionsgraphen

$y = e^x$ $y = e^{-x}$ $y = e^{x-2}$ $y = -e^{x-3} - 1$ $y = \ln(x-6)$

Folie 35

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

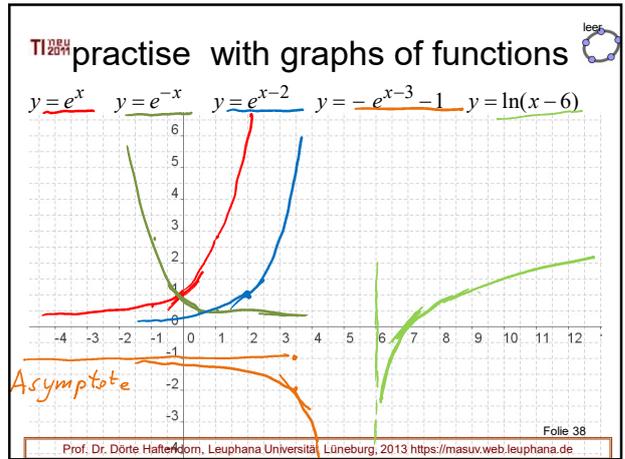
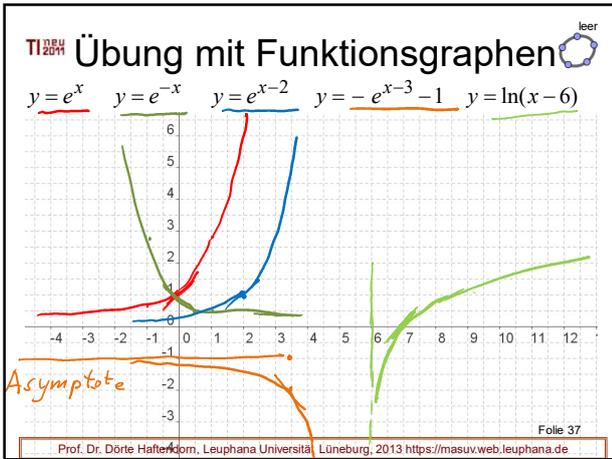
leer

Practise with Graphs of Functions

$y = e^x$ $y = e^{-x}$ $y = e^{x-2}$ $y = -e^{x-3} - 1$ $y = \ln(x-6)$

Folie 36

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>



Vierer-Übung

Erklären Sie sich hier die Gleichungen

Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Exponentialfunktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten

Folie 39
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Vierer-Übung

Erklären Sie sich hier die Gleichungen

Die, die nebeneinander sitzen, skizzieren 3 Exponentialfunktionen. Die beiden anderen müssen die Funktionsgleichung herausbekommen

6 Minuten

Folie 40
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Funktionsgleichung $y = f(x)$

Grundtypen

Potenzfunktion $f(x) = x^k$ $f^{-1} = g$

Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt[k]{x}$

Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ $f^{-1} = g$

Logarithmus $g(x) = \ln(x)$

Trigonometrische Funktion $f(x) = \sin(x)$ $f^{-1} = g$

Arcus-Funktion $g(x) = \arcsin(x) = \text{INV sin}(x)$

GeoGebra

Folie 41
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Equation of a Function $y = f(x)$

main types

power function $f(x) = x^k$ $f^{-1} = g$

root function $g(x) = \sqrt[k]{x}$

exponential function $f(x) = e^x$ $f^{-1} = g$

logarithm $g(x) = \ln(x)$

trigonometric function $f(x) = \sin(x)$ $f^{-1} = g$

arc function $g(x) = \arcsin(x) = \text{INV sin}(x)$

GeoGebra

Folie 42
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Differenziale

$m_s = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = 0.75$

Folie 43

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Differentials

$m_s = \frac{\text{hoch}}{\text{breit}} = 0.75$

$\text{slope } m = \frac{\text{high}}{\text{width}}$

Folie 44

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Differenziale

Parabel

Sekanten
Nur zur Vertiefung

Folie 45

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Differentials

Parabola

secants
only for deepening

Folie 46

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Das Differential

Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:
welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?

Wenn man B an A heranrücken lässt, wird das Steigungsdreieck der Sekante immer kleiner und man erhält die Tangente in A.

$$m_A = \lim_{x \rightarrow a} m_{\text{sekante}}$$

Folie 47

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

The Differential

At the end we search for every point on a function:
which slope has the function in that point?

If point B goes to point A, the slope-triangle of the secant line vanish more and more and you get the tangent line in A.

$$m_A = \lim_{x \rightarrow a} m_{\text{secant}}$$

Folie 48

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Das Differential

Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:
welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier

Folie 49

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

The Differential

At the end we search for every point on a function:
which slope has the function in that point?

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier

Folie 50

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Das Differential

Also untersuchen wir für jeden Punkt einer Funktion:
welche Steigung hat die Funktion in dem Punkt?

rot Ableitung

$f'(x)$

$\frac{df(x)}{dx}$

$f(x) = (x+2)(x-1)(x-7)^2$

Folie 51

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

The Differential

At the end we search for every point on a function:
which slope has the function in that point?

red derivative

$f'(x)$

$\frac{df(x)}{dx}$

$f(x) = (x+2)(x-1)(x-7)^2$

Folie 52

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

diff

Die **Ableitung** f' ist die Funktion, die für jedes x die Steigung der **Funktion** f angibt.

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

Fahrrad hier

Die rote Funktion ist also die Ableitung von der blauen.

Folie 53

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

diff

The **derivative** f' is the function, which shows the slope of the **given function** for every position x

Fahrrad, Bspl 2

Fahrrad pur

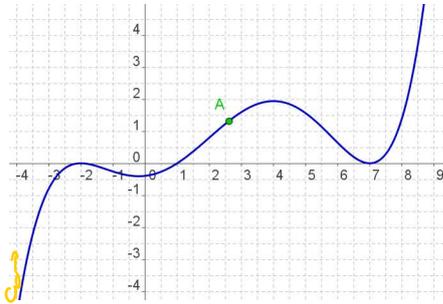
Fahrrad hier

Now: the **red function** is the derivative of the **blue function**.

Folie 54

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

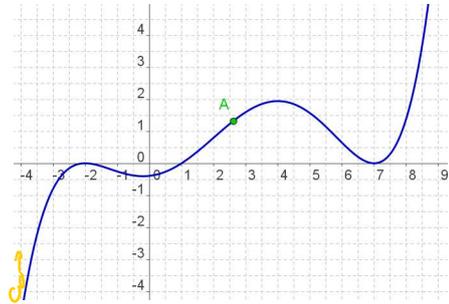
Übung 2 mit Funktionsgraphen



Folie 55

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Practice 2 with Graphs of Functions

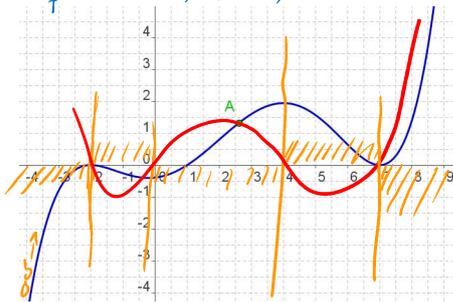


Folie 56

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Übung 2 mit Funktionsgraphen

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-7)^2$$

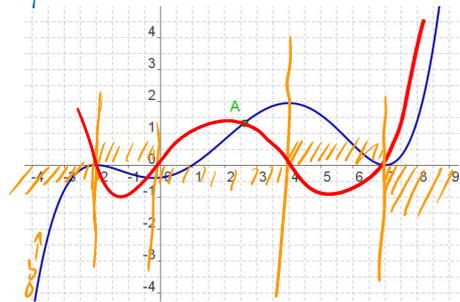


Folie 57

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Practice 2 with Graphs of Functions

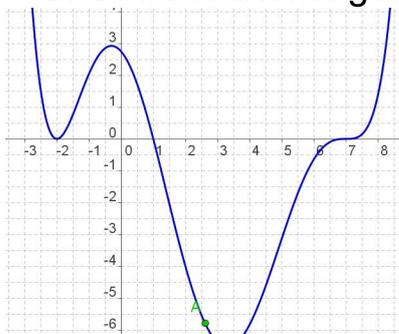
$$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-7)^2$$



Folie 58

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

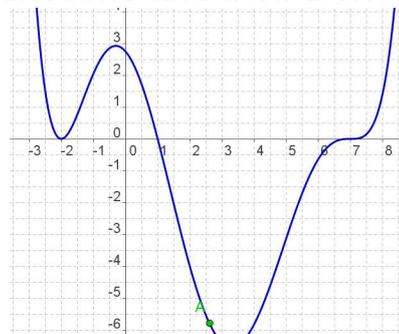
Übung 3 mit Funktionsgraphen und ihren Ableitungen



Folie 59

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

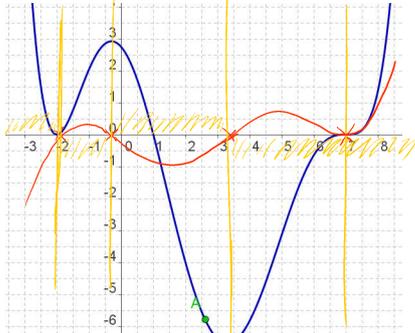
Practice 3 with Graphs of Functions and their Derivatives



Folie 60

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

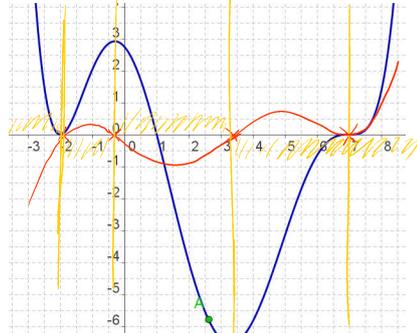
Übung 3 mit Funktionsgraphen und ihren Ableitungen



Folie 61

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

Practice 3 with Graphs of Functions and their Derivatives



Folie 62

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

e-Funktion, das ganze Geheimnis



Teil 1



Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$

die e-Funktion ist diejenige Exponentialfunktion, die in (0/1) die Steigung 1 hat.

Folie 63

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

E-function, the Hole Mystery



Teil 1



Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$

the one and only e-function is the exponential function who has in the point (0/1) the slope 1.

Folie 64

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

e-Funktion, das ganze Geheimnis



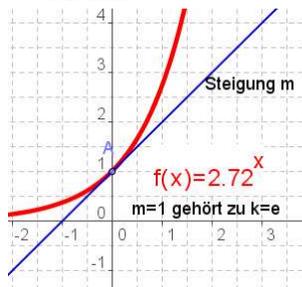
Teil 1



Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$

die e-Funktion ist diejenige Exponentialfunktion, die in (0/1) die Steigung 1 hat.



Die e-Funktion ist diejenige Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

$$(e^x)' = e^x$$

Folie 65

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>

E-function, the Hole Mystery



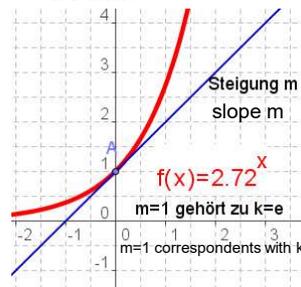
Teil 1



Teil 2 Ableiten

$$f(x) = e^x$$

the one and only e-function is the exponential function who has in the point (0/1) the slope 1.



The e-function is the only function who is identical with its derivative.

$$(e^x)' = e^x$$

Folie 66

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <https://masuv.web.leuphana.de>