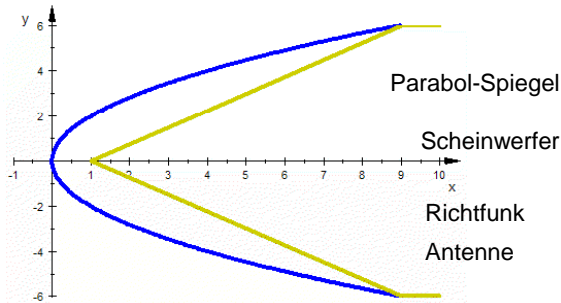


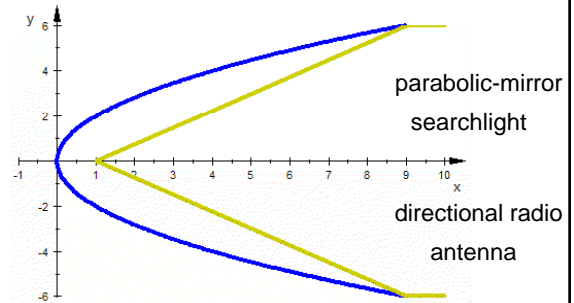
Funktionen als zentrales Werkzeug



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

1

Funktions as a Central Tool



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

2

Gliederung: Mathematik für alle

- Moderne Mathematik
 - **Werkzeuge für Mathematik**
- **Funktionen als zentrales Werkzeug**
 - **Phänomene und Strukturen**
- Optimierung als Ziel
 - **Mathematik wird angewendet**
- Numerik findet Lösungen
 - **Mit Hilfe des Computers**

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

3

Structure of Mathematics for Everyone

- modern mathematics
 - **tool for mathematics**
- **functions as a central tool**
 - **Phänomene und Strukturen**
- optimization as a goal
 - **applying of mathematics**
- numerics does solutions find
 - **with the help of computers**

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

4

Mathematik und Sprache

- formale Sprache
 - **Mathematiker unter sich, M.-Bücher**
- verbale Sprache mit Exaktheitsanspruch
 - **Mathematik in anderen Wissenschaften**
- offene aber treffende verbale Sprache
 - **Ziel von allg. Mathematik-Lehre**
- visuell unterstützte Sprache
 - **Basis für das Lehren**
- Sprache des Lernens und Herantastens

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Mathematics and Language

- formal language
 - **mathematicians each other, m.-books**
- verbal language claim for exactness
 - **mathematics in other sciences**
- open but accurate verbal language
 - **goal of general mathematics teaching**
- visually aided language
 - **basis of learning**
- language of approach and first learning

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

6

Mathematik und Sprache am Beispiel
 Eine Funktion ist stetig im Punkt $B=(a,b)$

- formale Sprache $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(b)$
- verbale Sprache mit Exaktheitsanspruch

Für alle Epsilon größer Null gibt es ein Delta größer Null so, dass für alle x aus einer Delta-Umgebung von a die Funktionswerte in einer Epsilon-Umgebung von b liegen.

- offene aber treffende verbale Sprache

Wenn die x -Werte von beiden Seiten an a heranrücken, dann rücken die Funktionswerte beliebig dicht an b heran.

- visuell unterstützte Sprache

Man kann dies in einem Zug zeichnen.

- Sprache des Lernens und Herantastens

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Mathematics and Language in an Example
 A function is continuous at a point $B=(a,b)$

- formal language $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\epsilon(b)$
- verbal language with claim of exactness

For all epsilon greater than zero there does exist a delta greater zero so that for all x out of a delta neighborhood of the abscissa a the function values lie in an epsilon neighborhood of b .

- open but accurate verbal language

When the x -values approach a by both sides, then the y -values approach arbitrarily close to b .

- visually aided language

You can sketch then without lifting the pencil.

- language of approach and first learning

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Aufgabe von „Mathematik für alle“ ist es

Funktionen als zentrales Werkzeug
 begreifbar zu machen.

Mit visueller Unterstützung sollen Sie die Funktionen-Welt ordnen und gliedern.

Sie sollen die tragenden Konzepte verstehen und einen Eindruck vom Nutzen bekommen.

Berechnungen, und Vertiefungen folgen in einigen Fachrichtungen später. Aber nicht hier!!!!!!

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

The Challenge of „Mathematik for Everyone“ is to support you in grasping:

functions are a central tool

You shall put in order and classify the world of functions by visual support.

You shall grasp the leading concepts and shall get an impression of the convenience of mathematics.

Calculations and consolidations will follow later in some branches of study. But not here!!!!!!

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Was ist überhaupt eine Funktion?

Abbildung, Funktion und Zuordnung sind Synonyme.

Es wird eine Definitionsmenge

Urbild-Menge $f: D \rightarrow W$ in eine Wertemenge abgebildet Bildmenge

und zwar auf **eindeutige** Weise.
 d.h. jedes Urbild hat ein Bild, aber auch nur eins.
 d.h. **jedes Urbild hat genau ein Bild.**

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

What's a Function Generally?

mapping, function and assigning are synonyms.

A domain D is given,

set of preimages the elements W are mapped in a range of values W

$f: D \rightarrow W$ in a **unique** matter.
 d.h. every preimage has an images, but only one image.
 d.h. **every preimage has exactly one image.**

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Ausschärfung der Begriffe

Abbildung, Funktion und Zuordnung sind Synonyme.

Abbildung verwendet man allgemein, im Besonderen aber in der Geometrie: Spiegelung, Drehung, Scherung, Projektion....

Zuordnung nimmt den Vorgang des Zuordnens und die einzelnen Objekte stärker in den Blick: den Waren sind Preise zugeordnet, jedem Konto eine PIN,...

Schule bis Klasse 8

Funktion nimmt die Veränderung stärker in den Blick: z.B. der Druck ist eine Funktion der Temperatur. „y ist eine Funktion von x“

13

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Spezifikation of the Concepts

mapping, function and assigning are synonyms.

mapping is taken generally, but specially in geometry: reflection, rotation, shearing, projection....

assigning looks at the process: an object could be assigned to another: every article is assigned to its price, every account is assigned to a PIN,...

This concept is common in school.

function looks at the transformation: i.e. the pressure is a function of temperature. „y is a function of x“

14

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

„y ist eine Funktion von x“

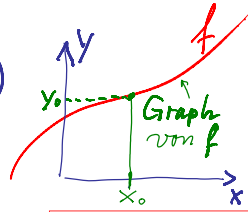
Wir betrachten nun erstmal den wichtigen Spezialfall, bei dem die reellen Zahlen in sich abgebildet werden.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \rightarrow y = f(x)$$

Stelle, Abszisse, x-Wert, Einsetzung, Argument unabh. Variable

Wert Ordinate y-Wert, Funktionswert abhängige Variable



Die Funktion heißt **f**

15

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

„y is a Function of x“

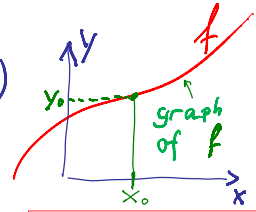
At first we are looking at a special situation: real numbers will be mapped in real numbers.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \rightarrow y = f(x)$$

place, abscissa, x-value, substitution, argument independent variable

value ordinate y-value, function value dependent variable



The function is named **f**.

16

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Funktionsgleichung $f(x) = x^k$

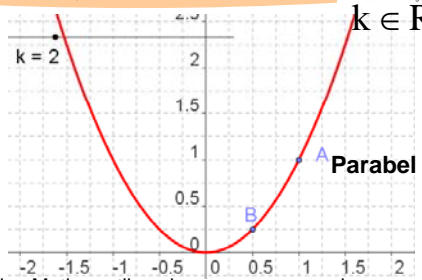
Grundtyp Potenzfunktion

Hauptform:

$$f(x) = x^2$$

$k \in \mathbb{R}$

GeoGebra, freies Mathematikwerkzeug, www.geogebra.org



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Equation of a Function $f(x) = x^k$

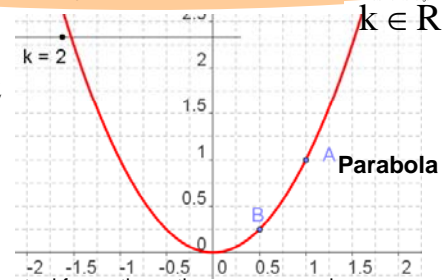
Basic type power function

main form:

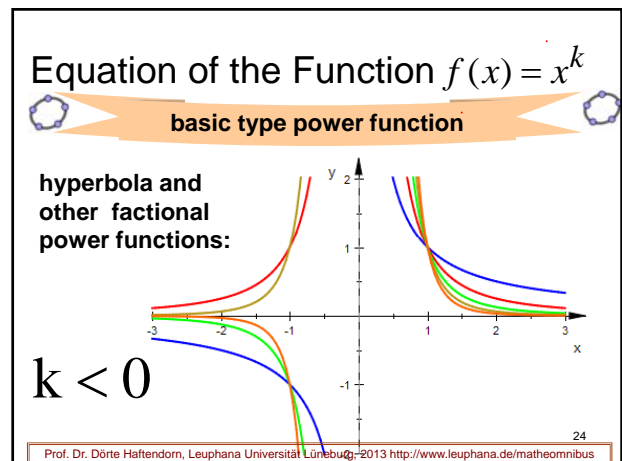
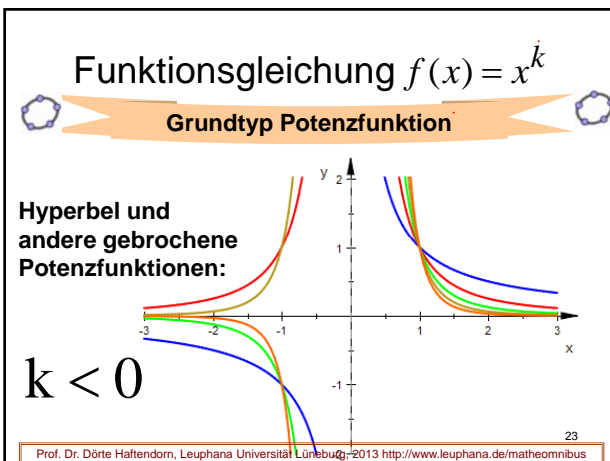
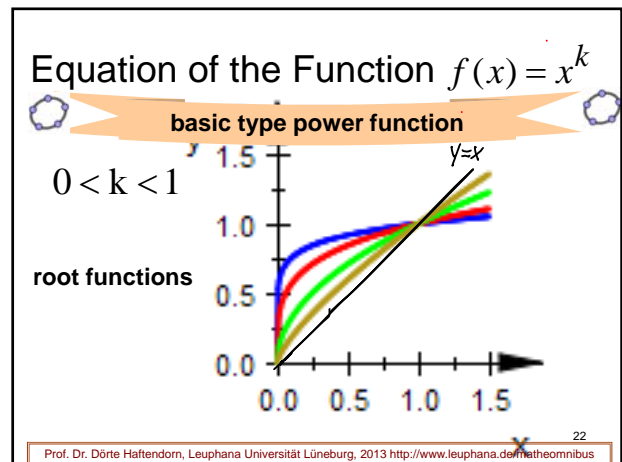
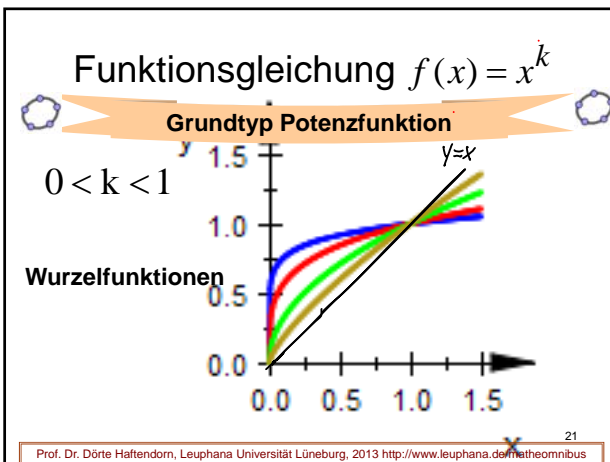
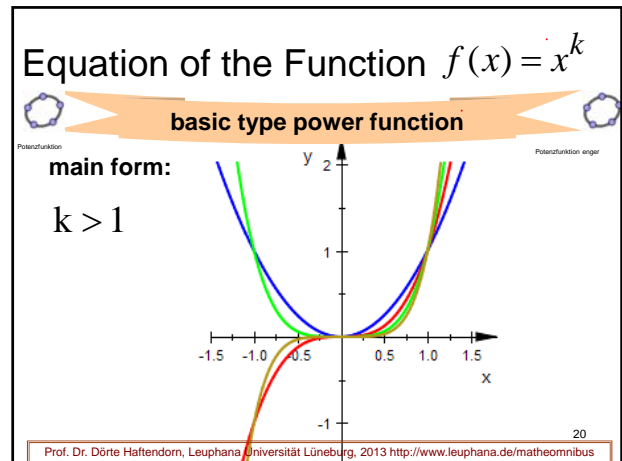
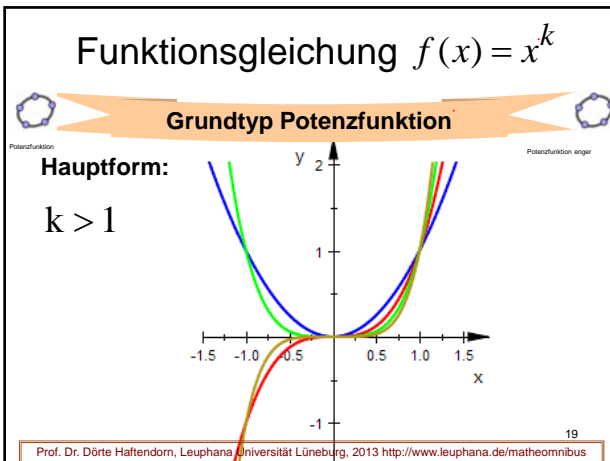
$$f(x) = x^2$$

$k \in \mathbb{R}$

GeoGebra, free tool for mathematics www.geogebra.org



Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>



Funktionsgleichung $f(x) = x^k$

Grundtyp Potenzfunktion

Hauptform: $f(x) = x^k$

Hyperbel u.a.

$k < 0$

$0 < k < 1$

$k \in \mathbb{N}$

$k=0; k=1$

GeoGebra

Potenzfunktion Potenzfunktion enger

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Equation of the Function $f(x) = x^k$

basic type power function

main form: $f(x) = x^k$

hyperbolal a.o.

$k < 0$

$0 < k < 1$

$k \in \mathbb{N}$

$k=0; k=1$

GeoGebra

Potenzfunktion Potenzfunktion enger

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionsgleichung $f(x) = x^k$

Grundtyp Potenzfunktion

Hauptform: $f(x) = x^k$

Grundbausteine für Polynome

Alle GeoGebra-Dateien findet man in matheomnibus

$k \in \mathbb{N}$

$k=0; k=1$

GeoGebra

Potenzfunktion Potenzfunktion enger

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Equation of the Function $f(x) = x^k$

basic type power function

main form: $f(x) = x^k$

basic blocks for polynomials

You will find all GeoGebra-files in matheomnibus

$k \in \mathbb{N}$

$k=0; k=1$

GeoGebra

Potenzfunktion Potenzfunktion enger

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionsgleichung $f(x) = t \cdot x^k$

Grundtyp Potenzfunktion

Selber machen

$t = 1$ oder $t = -1$

29

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Equation of the Function $f(x) = t \cdot x^k$

basic type power function

do it yourself

$t = 1$ oder $t = -1$

30

Prof. Dr. Dörte Haftendorf, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionsgleichung $f(x) = t \cdot x^k$

Variationen in Lage und Form

Strecken, Stauchen, Spiegeln

31

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Equation of the Function $f(x) = t \cdot x^k$

variations of location and form

stretching, compressing, reflecting

32

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktions-Variation $f(x) = t(x-a)^k + b$

Variationen in Lage und Form

Der Scheitel S ist auf (a,b) verschoben

verschoben

Scheitel (a/b)

33

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Function Variation $f(x) = t(x-a)^k + b$

variations of location and form

the apex S is scrolled to point (a,b)

scrolling

apex (a/b)

34

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionsgleichung $f(x) = \pm(x-a)^k + b$

Übung mit Potenzfunktionen

Selber machen

verschoben

35

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Equation of the Funktion $f(x) = \pm(x-a)^k + b$

exercises with power functions

You can not identify the exponents >4 and >5
Accepted are 4, 6 and 8 too, respectively 5 and 7 and so on.

verschoben

36

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheomnibus>

Funktionsgleichung $f(x) = \pm(x-a)^k + b$

Selber machen **Übung mit Potenzfunktionen**

$f(x) = (x-3)^4 + 1$ $f(x) = (x-2)^6 - 3$ $f(x) = -(x-3)^5 + 2$
 $f(x) = (x+3)^2 - 2$
 $f(x) = -(x-3)^4 - 1$ $f(x) = -(x+2)^3 + 1$

37
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Equation of the Funktion $f(x) = \pm(x-a)^k + b$

do it yourself **exercises with power functions**

$f(x) = (x-3)^4 + 1$ $f(x) = (x-2)^6 - 3$ $f(x) = -(x-3)^5 + 2$
 $f(x) = (x+3)^2 - 2$
 $f(x) = -(x-3)^4 - 1$ $f(x) = -(x+2)^3 - 1$

38
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Parabeln

39
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>

Parabolas

40
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, 2013 <http://www.leuphana.de/matheornibus>