Diskret verknotet
Knotentheorie und diskrete Mathematik

Dörte Haftendorn

Zusammenfassung: Die Knotentheorie ist ein in Lehramtszusammenhängen recht unbekanntes Gebiet. Aber sie bietet auf verschiedenen Niveaus gute Möglichkeiten, mathematisches Handeln, Überlegen, Argumentieren, Kommunizieren und diskretes Rechnen zu üben. Zudem kann der Aufbau einer mathematischen Theorie in eindrucksvollerer Weise mitvollzogen werden als es in den „großen“ Theoriegebäuden für Lernende möglich ist.

Obwohl Seemannsknoten u.ä. einen guten Einstieg bilden, ist schon der Begriff des mathematischen Knotens, der stets geschlossen ist, eine Abstraktion. Knoten können durch einfache Bewegungen ihre Gestalt verändern, man ist überzeugt, dass es sich in jedem Moment um denselben Knoten handelt. Aber die große Herausforderung ist es zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Knoten nun in diesem Sinne isomorph sind oder nicht. Dazu werden drei erlaubte Bewegungen, die „Reidemeister-Bewegungen“, herauskristallisiert und „Knoteninvarianten“ gebildet, die diese Bewegungen überstehen. Solche Knoteninvarianten sind die Dreifärbbarkeit, allgemein p-Etikettierbarkeit, und diverse Knotenpolynome. Da Knoten eine endliche Anzahl von Kreuzungen und Bögen haben, gehört die Arbeit mit Knoteninvarianten zu Diskreten Mathematik. Es kommen modulo-Rechnen, Bildung von Matrizen, Determinanten und Polynome vor. Die ganz tiefen Sätze sind in ihrer Aussage einleuchtend, ihre Beweise würden den Einsatz von Topologie erfordern. Von den behandelten Sätzen und Aussagen werden in diesem Beitrag fast alle Beweise wirklich geführt, denn die dafür nötige Formalisierung[1] ist sehr überschaubar und kann schon auf Schulniveau - mindestens aber im Grundstudium - verstanden oder sogar eigenständig gefunden werden. Dem Beitrag liegen Erfahrungen in der Lehrerausbildung (im Umfang von drei bis vier Doppelstunden) zugrunde.

---

[1] [Haftendorn 1]

Einstimmung

Erfahrungen mit Knoten in unserer Welt

Einen Knoten zu machen, eine Schleife zu binden erfüllt die kleinen Kinder zu recht mit Stolz. In vielen Bereichen des Alltags, im Sport, im Beruf, in der Freizeit sind spezielle Knoten üblich: Weberknoten, Anglerknoten, Seemannsknoten, Bergsteigerknoten, Chirurgenknoten u.s.w.. Es gibt preiswerte hervoragend bebilderte Bücher[2] dazu. Das Thema trifft meiner Beobachtung nach in allen Altersstufen auf ein reges Interesse.

Die in diesem Beitrag angesprochenen Adressaten sind zunächst einmal Menschen, die selbst erfahren wollen, was die Knoten mit Mathematik zu tun haben, was eine Knotentheorie zu bieten hat, inwiefern sie in das Gebiet der Diskreten Mathematik reicht. Ganz ausdrücklich möchte ich dazu ermuntern, einige Schritte in der mathematischen Knotentheorie für Schüler und Studenten aufzubereiten. Entsprechende fundierte Hilfen sollen hier gegeben werden.

Erste didaktische Bemerkungen

Auch für Studierende ist ein handlungsorientierter Einstieg sinnvoll. Ein geschlossener Knoten ist zu knüpfen und dann zu „zeichnen“. Letzteres ist schon eine gar nicht so leichte Anforderung, einschließlich der Diskussion, welche Anforderungen an eine Knotenzeichnung wohl gestellt werden müssen. Die im nächsten Abschnitt gegebene Knotendefinition und die Regeln der Standardprojektion fallen dann auf fruchtbaren Boden.

Ein gerade für die Schule sehr anregendes Buch mit vielerlei „Puzzle“ genannten Aufgaben bietet Heather McLeavy[3]. Es behandelt - wie auch dieser Beitrag - Primknoten, Reidemeisterbewegungen, Dreifäbbarkeit. Darüberhinaus geht die Autorin auch auf die handwerklichen Knoten, Spiegelung von Knoten und Kreuzungszahl auf Schulniveau ausführlicher ein.

---

[2] [Constantino], [Budworth]

[3] [McLeavy] in englischer Sprache und dreifarbigen Bildern.

Grundbegriffe für mathematische Knoten

Definition

Ein mathematischer Knoten ist definiert durch einen geschlossenen Polygonzug im 3D-Raum mit endlich vielen Punkten ohne Doppelpunkte. Er wird aufgefasst als topologisches Objekt, die erzeugenden Punkte und Strecken sind weder in ihrer geometrischen Lage noch in ihrer Länge oder Dicke wesentlich.

Mit der freien Software KnotPlot[4] ist diese Definition eindrucksvoll nachvollziehbar. Man setzt die Punkte im virtuellen Raum und kann sie dann verbergen. Dies zeigen Abb. 1a und 1b.

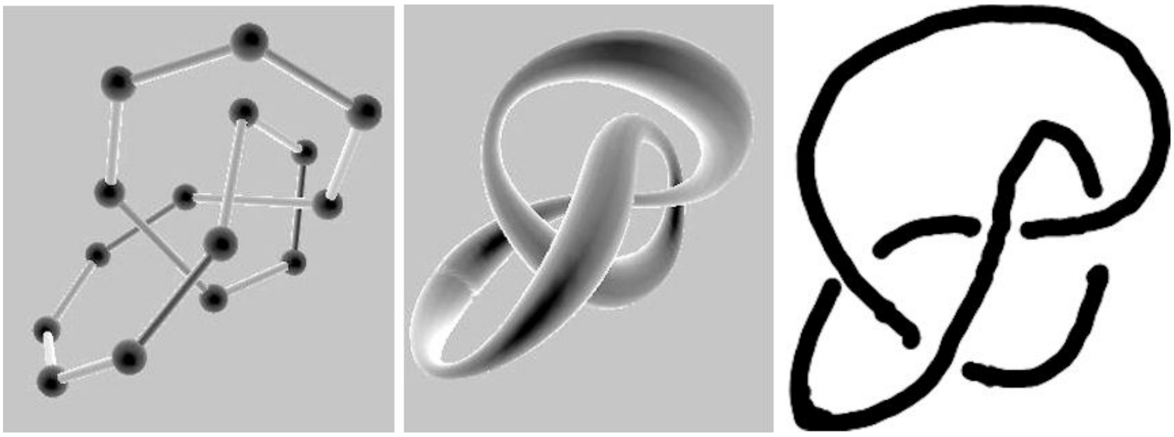


Abb. 1 a Knoten als Polygonzug, 1 b als topologisches Objekt, 1 c als Diagramm

In Abb. 1c ist ein Knotendiagramm in *Standardform* angegeben. An den Kreuzungen wird der unten liegende Strang durchbrochen dargestellt. An jeder Kreuzung darf es stets nur **einen** *überkreuzenden Bogen* und **zwei** unterkreuzende Bögen geben. Ein Bogen reicht von einer Unterkreuzung bis zur nächsten. Im Diagramm Abb. 1c hat der Knoten vier Kreuzungen und vier Bögen. In etwas andere Lage - in Abb. 1b räumlich von unten rechts gesehen und in Abb. 2 b dargestellt - kann man denselben Knoten auch mit drei Kreuzungen und drei Bögen zeichnen. Die Anzahl von Kreuzungen oder Bögen sind also keine

[4] [KnotPlot] Freeware, bzw. Shareware des Kanadiers Rob Sharein

invarianten Eigenschaften von Knoten. Darauf geht der nächste Hauptabschnitt ausführlich ein.

Orientierung

Knoten können *orientiert* werden, indem an einer Stelle ein Durchlaufrichtung gewählt wird, in der dann der ganze Knoten durchlaufen wird. Dieses führt zur Unterscheidung von *rechtshändigen und linkshändigen Kreuzungen*. Wie in Abb. 2a zu sehen, zeigt man an einer Kreuzung mit dem Daumen in Richtung des überkreuzenden Bogens und winkelt die Finger unter dem Daumen ab. Zeigen sie bei der rechten Hand in Richtung der unterkreuzenden Bögen, so heißt die Kreuzung *rechtshändig*, anderenfalls heißt sie *linkshändig*.

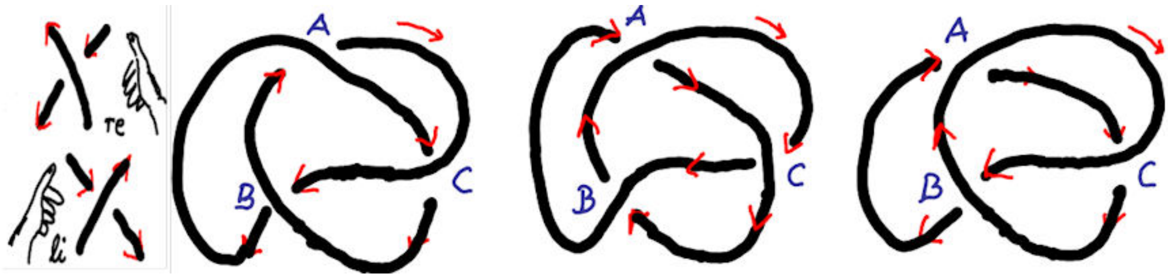


Abb. 2 a Händigkeit, 2 b Rechts-Kleeblattknoten, 2 c Links-Kleeblattknoten, 2 d Unknoten

Der Knoten in Abb. 2b entsteht aus dem Knoten in Abb. 1c, indem man den in der Mitte nach unten führenden Bogen nach links oben legt. In seinem Diagramm sind alle Kreuzungen rechtshändig. Im Knoten in Abb. 2c ist dagegen an jeder Kreuzung oben und unten vertauscht. Es ist der linkshändige Kleebblattknoten entstanden. Die beiden Kleeblattknoten (treefoil knots) lassen sich nicht ineinander überführen. Übrigens spielt die Wahl der Orientierung bei den Kleeblattknoten keine Rolle.

Aufgabe der Knotentheorie

Auch der Knoten in Abb. 2d kann nicht aus den anderen entstehen, denn es ist der *Unknoten*. Den großen Bogen, der obenauf liegt, kann man nach unten drehen, dabei fallen alle Kreuzungen weg. Den Unknoten muss man zu den Knoten rechnen, ebenso wie die Null als Zahl gelten muss.

Schon diese ersten Beispiele zeigen, dass es nicht trivial ist, einen Knoten von anderen und vom Unknoten zu unterscheiden. Knotendiagramme, aber auch räumliche Darstellungen von Knoten reichen nicht aus, Gleichheit[5] oder Unterschiedlichkeit zu „sehen". Das zeigen die beiden Paare in Abb. 3. Links ist das berühmte Perko-Paar dargestellt.

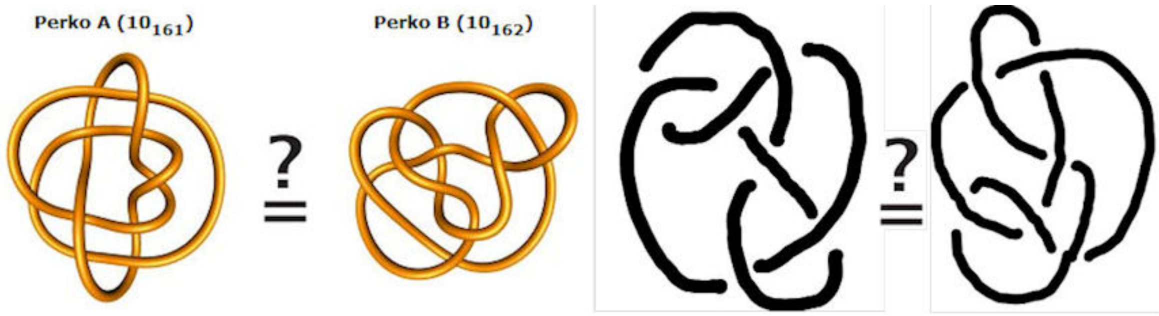


Abb. 3 Zwei paare gleicher Knoten: 3 a Perko-Paar, 3 b Paar aus dem Unterricht

Erst 1974 bewies K.A. Perko, dass es sich bei den Knoten in Abb. 3a um zwei Darstellungen desselben Knotens handelt. Den rechten der Knoten in Abb. 3b hat ein Student in der oben erwähnten Handlungsphase geknüpft. Stimmt er mit dem linken, der in einer Kontentabelle steht, überein?

Isomorphie - Isotopie - Gleichheit - Äquivalenz von Knoten

Die intuitive Vorstellung, dass ein Knoten, den man mit einem Seil knüpft, dessen Enden man dann unauflöslich verbindet, immer *gleich* bleibt, egal, wie man ihn hält oder hinlegt, ist durchaus auch mathematisch richtig.

Denkt man an die Definition eines Knotens als Streckenzug, so wäre eine Äuivalenzrelation zu definieren, bei der alle so erhaltenen Knoten in eine Äquivalenzklasse fallen. Dementsprechend hätte man mit einem vorgelegten Knoten nur einen Repräsentanten dieser Klasse. Wie auch bei Bruchzahlen, Vektoren u.s.w. betrachtet man diese Repäsentanten als Erscheinungsformen ein und desselben -stets gleichen - Objektes. Lediglich bei äquivalenten Glei-

---

[5] Die Präzisierung von „Gleichheit" - Äquivalenz - Isotopie - Isomorphie folgt.

chungen behält man das Wort „äquivalent“ bei, da man mit einer „gleichen“ Gleichung Verwirrung stiften würde. Hinter den verschiedenen Knotendiagrammen, räumlichen Repräsentationen und deren ebenen Bildern stellt man sich also den stets gleichen Knoten vor. Man spricht also von *dem Knoten*.

Außer Aquivalenz sind auch die topologischen Begriffe Isotopie und Isomorphie in Gebrauch. Ich verwende gern *Isomorphie* (wörtlich „gleiche Gestalt“), weil bei wirklich gleichen Knoten auch andere strukturelle Eigenschaften wie Händigkeit der Kreuzungen, Orientierung, diverse Kennzahlen u.a. eine Rolle spielen. *Isotopie* wörtlich „gleicher Ort“ leuchtet mir nicht so ein, außer dass solche Knoten in toplogischem Sinne gleich sind.

Reidemeister Bewegungen

Eine Formalisierung der obengenannten Äquivalenz ist für die genannte Adressatengruppe nicht unbedingt nötig, denn Kurt Reidemeister, der 1932 auch die oben genannte Knotendefinition[6] gab, kristallisierte schon 1926 drei Bwegungen heraus, die einen Knoten in einen äquivalenten Knoten überführen.

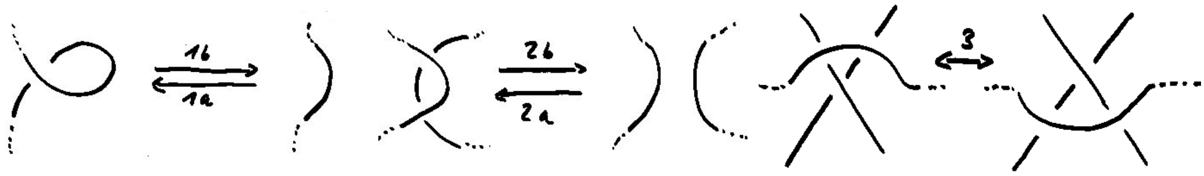


Abb. 4 Die drei Reidemeister-Bewegungen, sie verändern den Knoten nicht.

1. Eindrehen oder Aufdrehen einer Schlaufe
2. Übereinanderlegen zweier Bögen oder Trennen solcher Überlagerung
3. Verlegen eines Bogens von einer Seite einer Kreuzung auf die andere

Es leuchtet unmittelbar ein, dass diese drei Bewegungen den Knoten nicht verändern.

[6] [Reidemeister] Knotentheorie 1932 in [Epple] S.11

Reidemeister und nachfolgende Mathematiker bewiesen, dass auch umgekehrt je zwei Knotendiagramme desselben Knotens sich durch eine endliche Folge dieser Reidemeisterbewegungen ineinander überführen lassen.

In konkreten Fällen wie sie Abb. 3 zeigt, kann es sehr mühevoll sein, wirklich die einzelnen Reidemeisterschritte durchzuführen. Es scheint dann einfacher zu sein, den Knoten entsprechend der einen Darstellung zu knüpfen und „von Hand“ in die andere Darstellung zu überführen. Ihre eigentliche Kraft entfalten die Reidemeisterbewegungen bei der Herleitung von Knoteninvarianten.

Grundsätzliches zu Knoteninvarianten

Die Idee ist, dass man einem Knotendiagramm eine Eigenschaft - eine Zahl, eine Etikettierung, eine Matrix, ein Polynom, eine Gruppe, einen Zopf u.s.w. - zuordnet, von der man *bewiesen* hat, dass sie die „Reidemeisterbewegungen übersteht“, dass also das durch Reidemeister-Bewgungen entstandene Knotendiagramm die betreffende Eigenschaft weiterhin hat. Eine solche Eigenschaft heißt ***Knoteninvariante.*** Sie teilt die Menge aller denkbaren Knoten in zwei Klassen ein: die Knoten mit dieser Eigenschaft, und die Knoten ohne diese Eigenschaft.

Liegen zwei Knoten bezüglich einer Knoteninvarianten in zwei verschiedenen Klassen, so sind es wirklich verschiedene Knoten. Fallen sie in dieselbe Klasse, ist noch nichts entschieden.

Im Folgenden wird dieser Beitrag die *Dreifärbbarkeit*, allgemeiner die *p-Etikettierbarkeit* und die *Alexanderpolynome* ausführlich behandeln. Mit den letzteren beiden werden eigentlich nicht nur zwei Klassen von Knoten erzeugt, sondern jeder Wert von p und jedes Alexanderpolynom steht für eine Klasse.

Es gibt noch viele weitere Knoteninvarianten (Jones-Polynom, Conway-Polynom, HOMEFLY-Polynom, Signatur, Entknotungszahl u.a.), aber bisher keine, die jeden Knoten von jedem anderen trennt. Für die Adressaten einer Unterrichtseinheit „Knotentheorie“ zeigen die drei Invarianten dieses Beitrags aber deutlich genug das grundsätzliche Vorgehen. Sie haben zudem den Vorteil, dass sie „von Hand“ für Schüler und Studierende berechnet werden können und durch die Verwendung von Matrizen, Determinaten und Polynomen zeigen, wie die üblichen mathematischen Werkzeuge in ganz neuen Bereichen zur Wirkung kommen.

Die Dreifärbbarkeit ist sogar ab dem jungen Schulalter mit Buntstiften zu realisieren und sie bietet ein schönes Beipiel für mathematisches Argumentieren und Beweisen.

Zerlegung von Knoten, Primknoten, Knotentafeln

Manche Knoten kann man durch einen geraden Schnitt in zwei Teile zerlegen, die beide nicht der Unkoten sind. Dazu braucht man eine Darstellung des Knotens, bei der ein gerader Schnitt genau zwei Bögen teilt, die man auf jeweils einer Seite des Schnittes zusammenfügt.

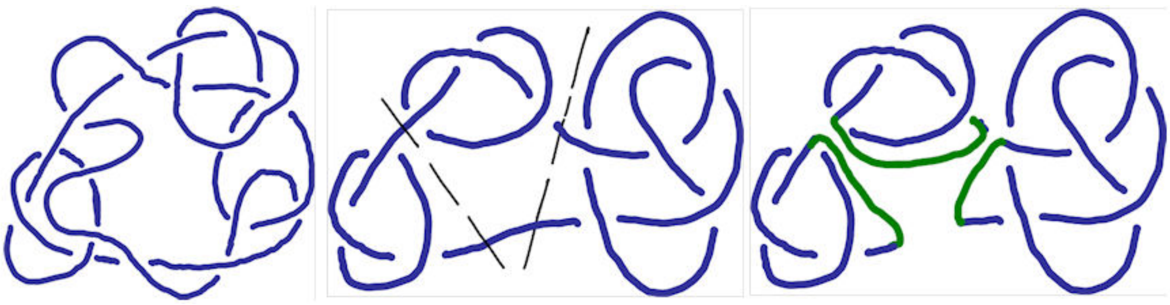


Abb. 5 a Zusammengesetzter Knoten, 5 b Ermöglichung der Schnitte, 5 c drei Primknoten

Ein solcher Knoten heißt *zusammengesetzter Knoten*. Ist so eine Teilung nicht möglich, ist der Knoten ein *Primknoten*.

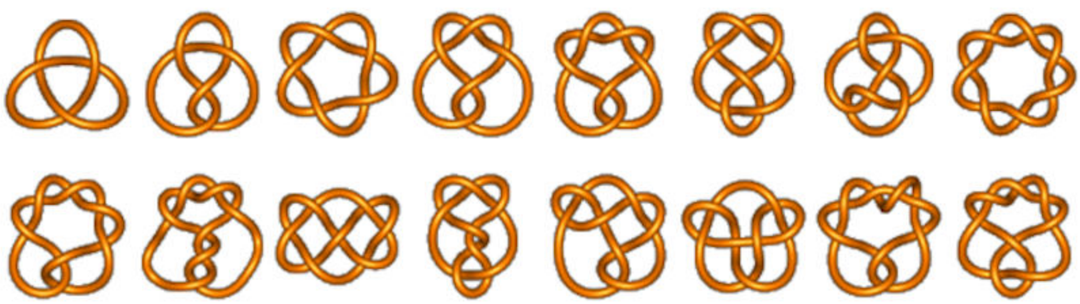


Abb. 6 Primknotentafel aus KnotPlot von 3_1 bis 8_2

Horst Schubert[7] bewies 1949, dass jeder Knoten eine *eindeutige Primknoten-Zerlegung* hat. Daher ist es lohnend die Primknoten mit wenigen Kreuzungen in einer Tabelle oder Tafel wie in Abb. 6 zu erfassen. Sie werden mit n_k bezeichnet, wenn Sie in der Familie der Knoten mit n Kreuzungen in der Tabelle den Platz k haben. Bis zum Knoten 9_{49} gibt es 85 Knoten[8]. Einigermaßen verlässliche Knotentafeln gibt es seit Ende des 19. Jahrhunderts.[9] Abb. 3 zeigt das Perko-Paar, das erst 1974 als nicht-verschieden nachgewiesen wurde.

Eine Knotentafel gibt auch Anlass, einen selbst erfundenen Knoten mit nicht zu vielen Kreuzungen entweder dort zu finden oder ihn als Zusammensetzung zu identifizieren. Außer dem Handeln mit Seilen und dem Augenschein helfen hier die unten besprochenen Knoteninvarianten.

Dreifärbbarkeit

Obwohl Dreifärbbarkeit als Sonderfall der p-Etikettierbarkeit für p=3 aufgefasst werden kann, wird sie in diesem Beitrag eigenständig behandelt.

Definition: Ein Knoten heißt *3-färbbar*, wenn sich eins seiner Knotendiagramme nach folgenden Regeln einfärben lässt:

(1) Jeder Bogen hat zwischen zwei Unterkreuzungen eine einheitliche Farbe.

(2) Eine Kreuzung ist entweder einfarbig oder es treffen sich genau drei Farben.

(3) Es gibt eine Kreuzung, die nicht einfarbig ist.

Es ist sicher sinnvoll, die Lernenden mit Buntstiften probieren und dabei ein planvolles Vorgehen entwickeln zu lassen. Z.B. wählt man eine Kreuzung aus und färbt die Bögen mit drei Farben[10]. In Abb. 7 ist dann sofort der ganze Kno-

---

[7] Zitiert nach [Sossinskij] S. 73 ff

[8] Knotentafel in [Livingston] S. 198 ff

[9] [Epple] S.154 ff

[10] Hier sind wegen des Schwarz-Weiß-Druckes auch Farbnummern geschrieben.

ten zulässig gefärbt. Beim nächsten Knoten ist bei A begonnen. Bei C müsste nun der überkreuzende Bogen blau (Farbe 3) sein, dann werden aber bei B und D die Regeln verletzt. Daher muss man neu beginnen und A als einfarbige Kreuzung wählen. Das erzwingt bei B,C und D dieselbe Farbe zu nehmen, der Knoten ist einfarbig geworden. Damit ist die Entscheidung gefallen: Knoten 4_1 ist nicht 3-färbbar. Der rechte Knoten 6_1 ist 3-färbbar. Beginnend bei A hangelt man sich in den Knoten hinein und kann alle Bedingungen erfüllen.

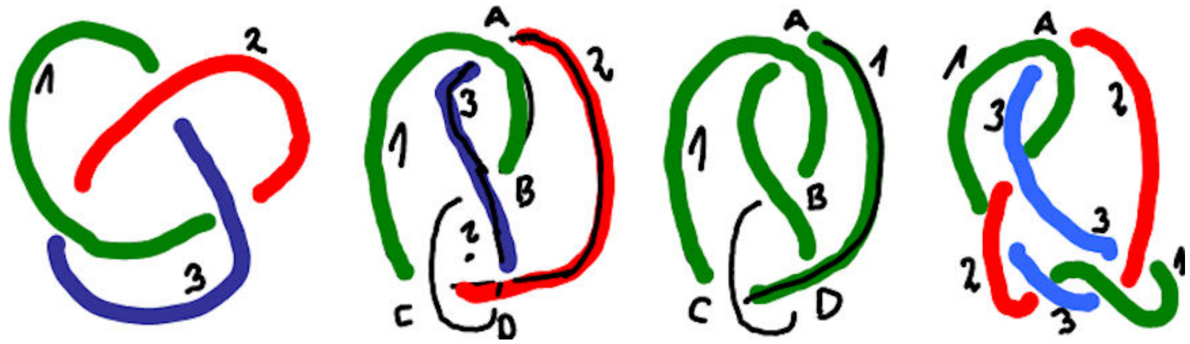


Abb. 7 Färbungsversuche beim Kleeblattknoten, beim 4_1-Knoten und rechts beim 6_1-Knoten

Es gibt durchaus Knoten mit Kreuzungen, die einfarbig sein *müssen*. Wählt man zufällig beim Start, oder wenn man im weiteren Verlauf eine Wahl treffen muss, eine solche Kreuzung als dreifarbig, kommt man auf Widersprüche, die aber nicht bedeuten, der Knoten sei nicht 3-färbbar. Ein Beispiel ist Knoten 7_7.

Die Knotenfärbung ist also sowohl Anlass für sinnvolles Handeln als auch für gute und genaue logische Argumentation. Diese wird noch mehr herausgefordert beim (interaktiven) Beweis, dass die Dreifärbbarkeit eine Knoteninvariante ist.

Beweis der Invarianten-Eigenschaft

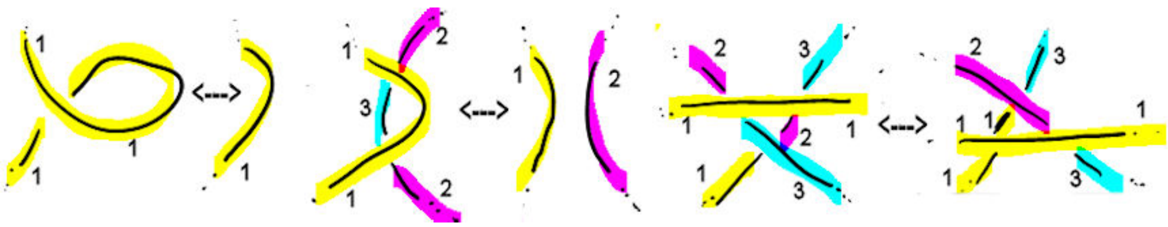


Abb. 8 Ein 3-farbiger Knoten bleibt nach den drei Reidermeister-Bewegungen 3-farbig

Ein Knoten sei erfolgreich dreigefärbt. In Abb. 8 betrachtet man quasi unter der Lupe nur relevante Ausschnitte. Eine Schlaufe ist nach den Färberegeln eine einfarbige Kreuzung. Nach Aufdrehen der Schlaufe hat der Bogen gerade diese Farbe. Beim Übereinanderschieben zweier verschieden farbiger Bögen entstehen zwei Kreuzungen, die nach den Regeln dreigefärbt werden können. Für die dritte Reidemeisterbewegung wird der Fall betrachtet, in dem alle drei Kreuzungen dreigefärbt sind. Wie Abb.8 zeigt, wird nach Verlegung des oberen Bogens eine Kreuzung einfarbig, aber die Bögen, die in den nicht näher betrachteten Knoten gehen, behalten ihre Farbe. Auch die weiteren Fälle berühren die Dreifärbbarkeit des Knoten nicht. Man zeigt das ebenso. In diesem Beitrag folgt es auch dem Beweis bei der p-Etikettierbarkeit für p=3.

p-Etikettierbarkeit

Definition:

Sei p sei eine natürliche Zahl größer als 2. Später wird sich zeigen, dass vor allem Primzahlen relevant sind.

Der *Knoten heißt p-etikettierbar*, wenn alle Kreuzungen mit (Farb-)Zahlen modulo p so beschriftet werden können, dass die Gleichung $2x - y - z \underset{p}{\equiv} 0$ gilt, wobei x für das Etikett des überkreuzenden Bogens, y und z für die Etiketten der beiden unterkreuzenden Bögen steht. Dabei muss mindestens ein Etikett von den anderen verschieden sein.

Dreifärbbarkeit ist ein Spezialfall für p=3

An einer dreifarbigen Kreuzung kommen als Etiketten Zahlen aus dem Restklassenkörper $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ infrage. Es gilt dann eine der Gleichungen $2\cdot 0 - 1 - 2 = -3 \underset{3}{\equiv} 0 \ \vee\ 2\cdot 1 - 0 - 2 = 0 \underset{3}{\equiv} 0 \ \vee\ 2\cdot 2 - 0 - 1 = 3 \underset{3}{\equiv} 0$, die Bedingungen für 3-Etikettierung sind also erfüllt. Eine einfarbige Kreuzung mit der Farbe *a* erfüllt $2\cdot a - 1\cdot a - 2\cdot a = 0\cdot a \underset{3}{\equiv} 0$. Ein dreifärbbarer Knoten ist also 3-

etikettierbar. Umgekehrt nimmt man die Etiketten als Farben, die Begriffe brauchen nicht unterschieden zu werden.

Die Dreifärbbarleit ist hier eigenständig aufgeführt, da sie mit viel einfacheren Mitteln als dem Rechnen modulo 3 durchgeführt und auch bewiesen werden kann. Zur Vereinfachung der Sprechweise werden die *Etiketten auch „Farben“* genannt und zu p-etikettierbar kann auch *p-färbbar* gesagt werden.

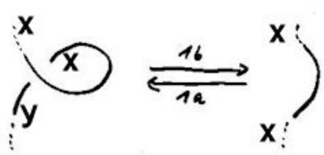
Satz zur p-Etikettierbarkeit

1. Eine Kreuzung darf einfarbig sein.
2. Eine nicht-einfarbige Kreuzung hat genau drei Farben.
3. Ist ein einziges Knotendiagramm p-etikettierbar (p-färbbar), dann sind alle Diagramme desselben Knotens p-etikettierbar (p-färbbar). *Invarianteneigenschaft*

Beweis: zu 1.: Es gilt $x = y = z \;\Rightarrow\; 2\cdot x - y - z = 2\cdot x - x - x = 0\cdot x \underset{p}{\equiv} 0$.

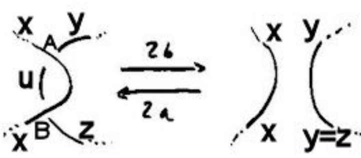
Zu 2.: Wenn zwei Bögen dieselbe Farbe haben, hat auch der dritte Bogen diese Farbe, denn: $\begin{cases} x = y \Rightarrow 2x - y - z = 2x - x - z = x - z \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow x \underset{p}{\equiv} z \\ y = z \Rightarrow 2x - y - z = 2x - 2y \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow 2(x-y) \underset{p}{\equiv} 0 \underset{p\ prim}{\Leftrightarrow} x \underset{p}{\equiv} y \end{cases}$

Zu 3.: Der Beweis erfolgt dadurch, dass man zeigt, dass ein p-etikettiertes Knotendiagramm die Reidemeisterbewegungen **„**übersteht“.



$1a:\;\; y = x$ trivialerweise

$1b:\;\; 2x - x - y = x - y \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow x \underset{p}{\equiv} y$

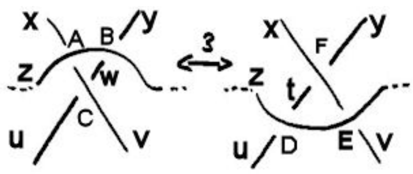


$2a:\; y = z$ wird bezeichnet.

A: $2x - u - z = 2x - u - y \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow u \underset{p}{\equiv} 2x - y$

B: $2x - u - y \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow u \underset{p}{\equiv} 2x - y$

$$2b: \text{Es gilt: } \left(\text{A: } 2x-u-y \underset{p}{\equiv} 0 \wedge \text{B: } 2x-u-z \underset{p}{\equiv} 0 \right) \Rightarrow y \underset{p}{\equiv} z$$



Wenn der Knoten p-etikettierbar ist, gilt links:

$$\begin{pmatrix} \text{A: } 2z-x-v=0 \ \wedge \\ \text{B: } 2z-y-w=0 \ \wedge \\ C: 2v-u-w=0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = 2z-2x+y$$

$$\begin{pmatrix} \text{E: } 2z-x-v=0 \ \wedge \\ \text{F: } \ 2x-y-t=0 \ \wedge \\ D: 2z-u-t=0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} E=A \\ t=2x-y \\ t=2z-\left(2z-2x+y\right)=2x-y \end{array}$$

t ist also zu den Regeln passend wählbar.

Damit ist gezeigt, dass ein p-etikettierbarer Knoten alle Reidemeisterbewegungen übersteht, ohne die p-Etikettierbarkeit zu verlieren. Die Fälle, dass einzelne der Kreuzungen einfarbig sind, werden von den Gleichungen auch erfüllt und sind daher in den Beweisen enthalten.

Satz von der Vererbung der p-Etikettierbarkeit

Ein Knoten, der p-etikettierbar ist, ist auch $(p \cdot k)$-etikettierbar.

Beweis: $\forall k \in \mathbb{N}: \quad 2x-y-z \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow 2x \cdot k - y \cdot k - z \cdot k \underset{p}{\equiv} 0 \cdot k \underset{p}{\equiv} 0$

Satz von der Etikettierbarkeit zusammengesetzter Knoten

1. Ist in einer Zusammensetzung mehrerer Knoten wenigstens einer p-etikettierbar, dann ist der ganze Knoten p-etikettierbar.
2. Ist in einer Zusammensetzung zweier Knoten einer p-etikettierbar und der andere q-etikettierbar, dann ist der ganze Knoten sowohl p-etikettierbar als auch q-etikettierbar als auch pq-etikettierbar.

Beweis: Zu 1: An den p-etikettierbaren Knoten werden andere Knoten durch Auftrennung eines Bogens angehängt. Macht man die angehängten Knoten einfarbig in der Farbe des jeweils aufgetrennten Bogens, ergibt sich kein Problem. Alle Gleichungen gelten modulo p und der Gesamtknoten ist nicht einfarbig.

Zu 2: Das Obige kann man für den q-etikettierbaren Teilknoten auch tun. Die pq-Etikettierbarkeit folgt aus dem Vererbungssatz.

Anmerkung: Werden zwei p-etikettierbare Knoten zusammengesetzt, kann man den anknüpfenden Bogen so färben, dass er passt. Dies folgt aus der Homogenität des Gleichungssytems, wie unten gezeigt.

Das Gleichungssystem und allgemeine Aussagen über mögliche p

Ein Knoten habe *n Kreuzungen*. Dann hat er auch *n Bögen*, denn ein Bogen beginnt an an einer Unterkreuzung, an der nächsten Unterkreuzung beginnt ein neuer Bogen u.s.w.. So hat jede Kreuzung genau einen dort beginnenden Bogen.

Für eine p-Etikettierung muss man nun n Gleichungen mit n Variablen für die Bogenetiketten aufstellen. Dazu gehört ein homogenes, lineares Gleichungssystem mit einer n x n-Matrix. Jede einheitliche Etikettierung mit Null oder einer anderen Zahl ist sicher Lösung. Damit gibt es mehr als nur die triviale Lösung, woraus folgt, dass die zugehörige Determinante Null ist und man eine Gleichung fortlassen kann. Da bei homogenen Gleichungssystemen auch Summen und Vielfache von Lösungen wieder Lösungen sind, kann man es so einrichten, dass z.B. der letzte Bogen mit Null etikettiert wird. So wird es sinnvoll, eine Zeile und eine Spalte fortzulassen. Dass dabei eine beliebige Zeile genommen werden kann, erläutert Livingston[11].

Das so reduzierte Gleichungssystem ist wieder homogen. Es hat nur eine nichttriviale Lösung, wenn die zugehörige Determinante Null ist. Im Allgemeinen

[11] [Livingston] S. 41

ist diese Determinante aber eine ganze Zahl m. Eine Null und damit nicht-triviale Lösungen, kann man also nur in Restklassenringen erwarten.

Satz von den möglichen p für die p-Etikettierbarkeit.

Stellt man für einen Knoten mit n Kreuzungen und n Bögen das der Definition der p-Etikettierbarkeit entsprechende Gleichungssystem auf und streicht aus der zugehörigen Determinante je eine beliebige Zeile und Spalte, so erhält man die Determinante D_{red} . Für sie gilt:

$$\left(D_{red} = m,\ m \in \mathbb{Z},\ p \text{ Primfaktor von D},\ p > 2\right) \Rightarrow \text{Knoten ist } p\text{-}etikettierbar.$$

Beweis: Es gilt $D_{red} = m \underset{p}{\equiv} 0$, damit existiert nach dem oben Gesagten eine eine nicht-triviale Lösung, d.h. es gibt Etiketten ungleich 0 und alle p-Etikettierbarkeitsbedingungen sind mit diesem p erfüllt.

Folgerung: Ist zudem q ein Primfaktor, so ist der Knoten auch q-etikettierbar, pq-etikettierbar und m-Etikettierbar. Darum werden bevorzugt nur die Primfaktoren betrachtet.

Anmerkung: Mit den mathematischen Werkzeugen von Schülern und Studierenden lassen sich die Determinaten der überschaubaren Knoten berechnen, nicht aber Gleichungssysteme in Restklassenkörpern lösen. Mit Mathematica - und ähnlich starken CAS - ist das möglich. Dann muss zwar p konkret eingetragen werden, aber man kann bequem einige kleine Primzahlen durchprobieren, wenn man den obigen Satzt nicht kennt. Siehe Abb. 9 rechts.

Möglichkeiten ohne obigen Satz von Hand

Die Matrix des Gleichungssystems ist recht dünn besetzt, denn jede Zeile enthält i. d. R. nur drei Einträge, nämlich eine Zwei und zwei negative Einsen. Daher ist es für kleine n noch aussichtsreich, das reduzierte System von Hand zu lösen. Im Beispiel des Knoten 5.2 erhält man etwa $7x \underset{p}{\equiv} 0$ im letzten Schritt.

Ein nicht-triviales x ist also nur für p=7 möglich. Knoten 5.2. ist also 7-etikettierbar. Diese Rechnung ist in Abb. 9 zu sehen.

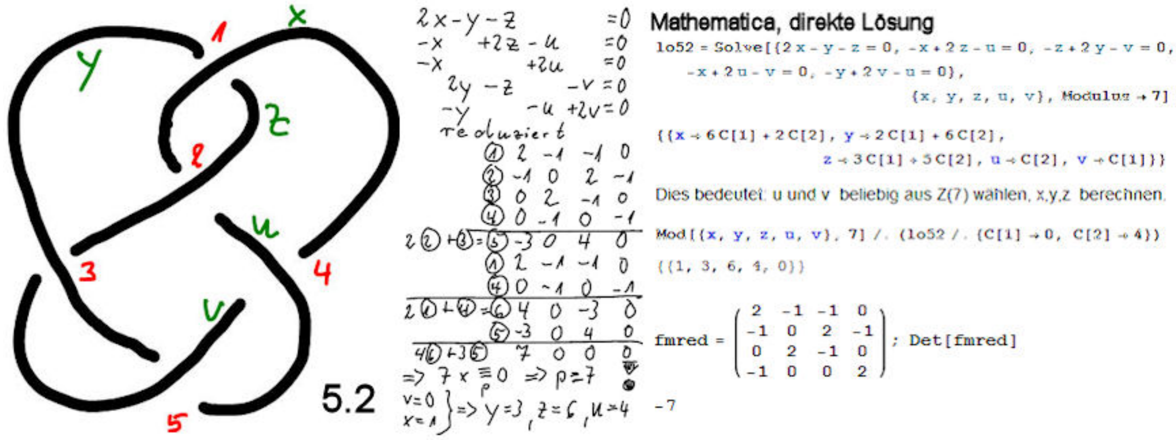


Abb. 9 Der Knoten 5.2, Rechnung zur p-Etikettierbarkeit von Hand und mit Mathematica

Didaktische Anmerkung

Die Dreifärbbarkeit eignet sich ohne Einschränkung für jede Altersstufe und sie zeigt in eindruchsvoller Weise, was eine Invariante ist und mit welcher Grundidee die Welt der Knoten untersucht werden kann.

Die p-Etikettierbarkeit ist ein sinnvolles Thema in der Lehramtsausbildung, es vertieft Kenntnisse aus der linearen Algebra und übt auch das Beweisen an überschaubarem Gegenstand. Dass der Kleeblattknoten wirklich genau 3-färbbar und nicht etwa 5-färbbar ist, sorgt für Überraschung. Die Erkenntnis, dass 5-Färbbarkeit nicht einfach heißt: „man nehme fünf Buntstifte“, ist ein schöner Einblick in mathematisches Vorgehen.

Die Übertragbarkeit auf zusammengesetzte Knoten oder allgemeine Überlegungen zu Torusknoten s.u.) erweitern auch den mathematischen Blick.

5-Torusknoten

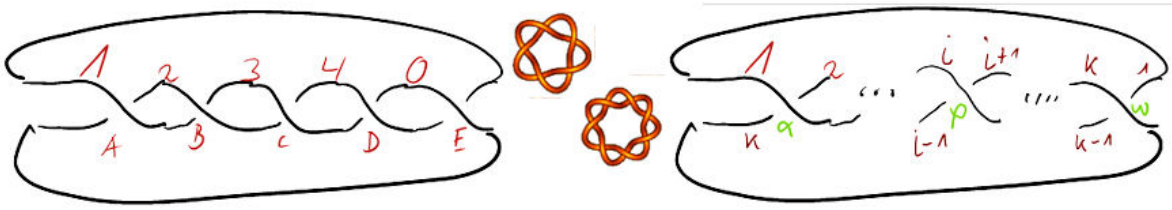


Abb. 10 Der 5- und der k-Torusknoten und die p-Etikettierbarkeit

Umwickelt man einen Torus mit einem Seil, das man dann schließt, entsteht ein Torusknoten. In Abb. 10 sind Knotendiagramme von Torusknoten als geschlossene Zöpfe (s.u.) dargestellt. *Ein k-Torusknoten hat k Kreuzungen*. Beim 5-Torusknoten in Abb. 10 erkennt man, dass bei nur 4 Kreuzungen statt eines Knotens eine Verschlingung von zwei Unknoten dargestellt wäre. Es gilt der

Satz von den Torusknoten

1. k-Torusknoten existieren nur für ungerade Zahlen k >2
2. Ein k-Torusknoten ist p-etikettierbar mit p prim, wenn $p \mid k$ gilt, also wenn p die Zahl k teilt.

Beweis: Zu 1. siehe oben. Zu 2.: Um zu zeigen, dass hier ein Vorgehen am Beispiel leicht zu verallgemeinern ist, sei der Beweis zunächst für den 5-Torusknoten durchgeführt. Für alle 5 Kreuzungen werden die Gleichungen entsprechend dem Etikettierungsvorschlag in Abb. 10 geprüft:

$$A: 2\cdot 1-2-0=0;\ B: 2\cdot 2-3-1=0;\ C: 2\cdot 3-4-2=0;\ D: 2\cdot 4-0-3=5\underset{p}{\equiv}0$$

$E: 2\cdot 0-4-1=-5\underset{p}{\equiv}0$ Die letzten beiden Gleichungen sind genau für p=5 richtig. Also ist der 5-Torusknoten 5-färbbar. Der Kleeblattknoten ist der 3-Torusknoten, er ist dreifärbbar, was schon oben bewiesen ist. Ein 1-Torusknoten wäre der Unknoten, er ist „1-färbbar“, dies ist in der Definition ausgeschlossen.

Ein k-Torusknoten kann wie in Abb. 10 rechts etikettiert werden. Es ist zu prüfen, ob für alle Kreuzungen die entsprechenden Gleichungen erfüllbar sind.

$$\alpha: 2\cdot 1-2-k=-k\underset{p}{\equiv}0 \Leftrightarrow k\underset{p}{\equiv}0;\quad \varphi:\ 2\cdot i-(i+1)-(i-1)=0\ \ \forall p$$

$$\omega: 2\cdot k-(k-1)-1=k\underset{p}{\equiv}0 \Leftrightarrow k\underset{p}{\equiv}0 \Leftrightarrow\ p\mid k$$

q.e.d.

Es folgt: Der p-Torusknoten mit p prim ist p-färbbar. Da immer auch alle Vielfachen von p zu Etikettierungen führen, ist zum Beispiel der 15-

Torusknoten r-etikettierbar mit $r \in \{3, 6, 9, 12, \ldots\} \cup \{5, 10, 15, \ldots\}$. Man sieht wieder, dass p-Etikettierbarkeit vor allem für Primzahlen p interessant ist.

Alexanderpolynom

Epple[12] stellt die Entwicklung der Knotentheorie bis 1945 ausführlich dar. Es wird klar, wie vor allem in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts um Erkenntnisse und eine strenge Mathematisierung gerungen wurde. Ein Polynom als Knoteninvariante konnten zuerst 1927 James W. Alexander und G. B. Briggs vorstellen. Sie verfolgten zunächst topologische Ideen, kamen dann aber zu diskreten Methoden auf der Grundlage von Knotendiagrammen. Dieser Beitrag folgt zunächst Livingston[13] in Form einer Handlungsanweisung. Die ursprüngliche Definition von Alexander wird auch vorgestellt.

Vorbereitung

In einem Knotendiagramm müssen die n Kreuzungen und die n Bögen beschriftet werden. Weiter ist der Knoten zu orientieren, wobei die Richtung beliebig ist. Für jede der Kreuzungen ist nun die Händigkeit anzumerken. (Erklärung am Anfang des Beitrags.) In Abb. 11 sind die Kreuzungen1, 2 und 3 linkshändig, 4,5 und 6 rechtshändig.

Aufstellung der Alexandermatrix

Nun wird die Alexandermatrix aufgestellt, in der jede Kreuzung eine Zeile hat, und jeder Boden eine Spalte. Für jede Kreuzung wird für den überkreuzenden Bogen 1-t eingetragen, für die ankommenden und abgehenden Bögen t und -1 bei Linkskreuzungen, b.z.w. -1 und t bei Rechtskreuzungen. Siehe Abb. 11.

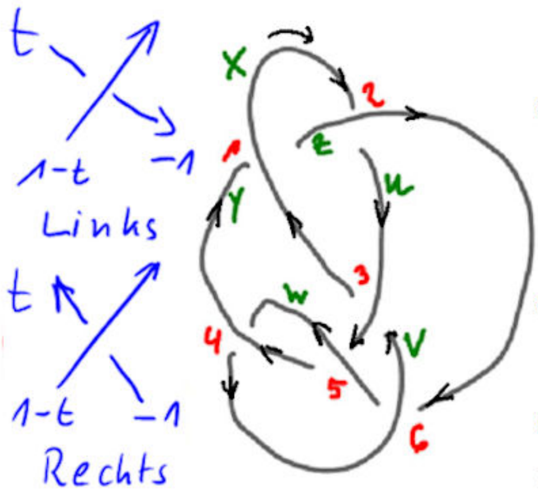
Die reduzierte Alexandermatrix erhält man durch Streichen je einer beliebigen Zeile und Spalte. Deren Determinante ist ein Polynom in t, bei dem man oft noch t-Potenzen und ggf. (-1) ausklammern kann. Der verbleibende Faktor, ein

---

[12] [Epple] 400 Seiten, Speziell zu Alexanderpolynom S.5 und S 339 ff

[13] [Livingston] S. 44 ff

Polynom in t mit positiver höchster Potenz und nicht verschwindendem Absolutglied ist *das Alexanderpolynon des Knotens*.



$$\text{kret} = \begin{pmatrix} 1-t & t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1-t & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & t & 0 & -1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1-t & t \end{pmatrix};$$

$$\text{kretred} = \begin{pmatrix} 1-t & t & -1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t \\ 0 & 1-t & 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

```
Expand[Det[kretred] / t]
```

$1 - 3t + 5t^2 - 3t^3 + t^4$ **Alexanderpolynom**

Abb. 11 Aufstellung des Alexanderpolynoms für den Studentenknoten in Abb. 3b rechts

Es war bei Abb. 3 die Frage aufgeworfen, ob der Knoten des Studenten (ganz rechts in Abb. 3) isomorph ist zu dem Knoten 6.3.

Die drei Primknoten mit 6 Kreuzungen haben die Alexanderpolynome

$6.1:\ 2t^2 - 5t + 2;\quad 6.2:\ t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1;\quad 6.3:\ t^4 - 3t^3 + 5t^2 - 3t + 1;$

Der Studentenknoten und Knoten 6.3 haben dasselbe Alexanderpolynom. Da ersterer auch Primknoten ist und es nur die drei Primknoten mit 6 Kreuzungen gibt, ist der Studentenknoten wirklich isomorph (äquivalent, gleich) dem Knoten 6.3.

$3.1:\ t^2 - t + 1;\quad 4.1:\ t^2 - 3t^3 + 1;\quad 5.1:\ t^4 - t^3 + t^2 - t + 1;\ 5.2:\ 2t^2 - 3t^3 + 2;$

Dies sind die Alexanderpolynome der ersten Primknoten. Livingston[14] gibt eine vollständige Liste bis zum Knoten 9.49. Nicht alle Polynome sind verschieden, z.B. hat 9.46 dasselbe Polynom wie 6.1. Für 9.28 und 9.29 stimmen die Polynome auch überein. Auch beim Perko-Paar (Abb. 3) sind die Alexanderpolynome gleich.

---

[14] [Livingston] S. 205ff

Ein Knoten heißt *alternierend*, wenn jeder Bogen genau eine Überkeuzung hat. Es gibt auch nicht-alternierende Primknoten, z.B. 9.42 bis 9.48. Bei den 10ner Knoten sind es 42, darunter Perko A (10.161).

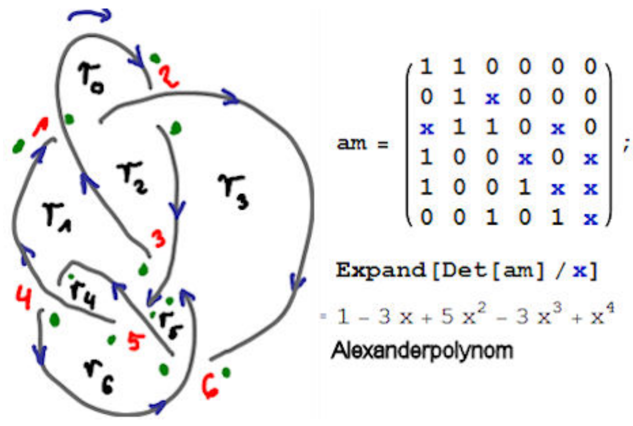
Zum Beweis der Invarianteneigenschaft

Beim Beweis, dass das Alexanderpolynom die Reidemeisterbewegung 1 übersteht, muss man in den überkreuzenden Bogen einen Punkt einfügen und zwei Bögen daraus machen. Das neu eingefügte Bogenstück hat keine Verbindung mit anderen Kreuzungen. Entwickelt man dann die Determinante nach der Spalte dieses Bogens, erhält man dasselbe Alexanderpolynom wie ohne die Schlaufe, Faktoren t oder -1 spielen ja keine Rolle.

Für die Reidemeisterbewegung 2 hat man zwei Kreuzungen und zwei Bögen die wegfallen. Auch hier kommt man mit geschicktem Entwickeln der Determinanten weiter, da das bei der p-Etikettierbarkeit u genannte Bogenstück keinen Kontakt zu anderen Kreuzungen hat.

Für Reidemeisterbewegung 3 wird es eine aufwendige Fleißarbeit.

Alternative Vorgehensweise, Alexanders ursprügliche Methode



Die n Kreuzungen werden bezeichnet. Gebiete zwischen den Bögen werden mit r_0 bis r_n eingetragen, r_0 muss an das Außengebiet grenzen. Der orientierte Knoten wird durchlaufen, bei jeder Unterkreuzung werden links zwei gebiete markiert.

Abb. 12 Ursprüngliche Methode zur Aufstellung des Alexanderpolynoms

In der Matrix hat wieder jede Kreuzung ihre Zeile, die Spalten gehören zu den Gebieten r_1 bis r_n. Dabei wird r_0 weggelassen. Für jede Kreuzung wird x eingetragen, wenn das Gebiet markiert ist, eine 1, wenn es an der Kreuzung beteiligt ist und 0 sonst. Die Determinante dieser Matrix ist bis auf den Faktor einer t-Potenz oder (-1) das Alexanderpolynom.

Zum Beweis: Das Überstehen der Reidemeisterbewegungen 1 und 2 läuft wie bei der anderen Verion auf passende Determinantenentwicklungen hinaus. Für 3 ist es ebenso mühsam. Für den Beweis, dass es sich um dasselbe Alexanderpolynom handelt, habe ich nur sehr vage Andeutungen auf topologische Methoden gefunden.

Didaktische Bemerkung

Die Alexanderpolynome sind mit Mitteln der Studierenden, aber auch von Schülern berechenbar, da die Determinanten leicht beschafft werden können. Statt der allgemeinen Beweise könnte man mit Berechnungen an verschiedenen Diagrammen desselben Knotens zufrieden sein. Besonders für Lehramtsstudierende ist es verblüffend und bildend, dass Polynome nicht nur als Polynomfunktionen in „Kurvendiskussionen“ eine Rolle spielen. Ziel einer Lehreinheit „Knotentheorie“ ist jedenfalls nicht, dieses Sachgebiet zu beherrschen, sondern - wie Sossinskij[15] in seinem Untertitel sagt - zu erleben, „wie eine Theorie entsteht“.

Zöpfe und Knoten

Dieses interessante Gebiet wird in diesem Beitrag nur ganz kurz vorgestellt. Überlegungen zu Zöpfen hat man in den Handschriften von Gauß gefunden[16]. Er hat aber nichts dazu publiziert. Die eigentliche Entwicklung setzte mit Emil Artin[17] und O. Schreier in Hamburg ein. Wie auch die Knoten können Zöpfe eine Realisierung im dreidimensionalen Raum mit mehreren Strängen haben, die man sich „oben“ angebracht denkt. Benachbarte Stränge kann man in irgendeiner Reihenfolge kreuzen. Auch für Zöpfe gibt es eine standardisierte Darstellung, die in Abb. 13 gezeigt ist. In einer Höhe darf stets nur eine Keuzung gezeichnet werden. Nummeriert man die Startplätze der Stränge durch, so kann man eine Kreuzung mit A_i bezeichnen, wenn der Strang von

---

[15] [Sossinskij] Mathematik der Knoten, Wie eine Theorie entsteht
[16] [Epple] S. 69
[1717] Artin, E (1925 a) : Theorie der Zöpfe, HA 5(1926, 7.23 (nach [Epple] S. 411

Platz i den Strang von Platz i+1 überkreuzt, mit a_i, wenn er diesen unterkreuzt. Die untereinander folgenden Kreuzungen bilden durch Hintereinanderschreiben ihrer Bezeichnungen ein Zopfwort. Bei wenigen Strängen schreibt man auch A,a,B,b,C,c,D,d….

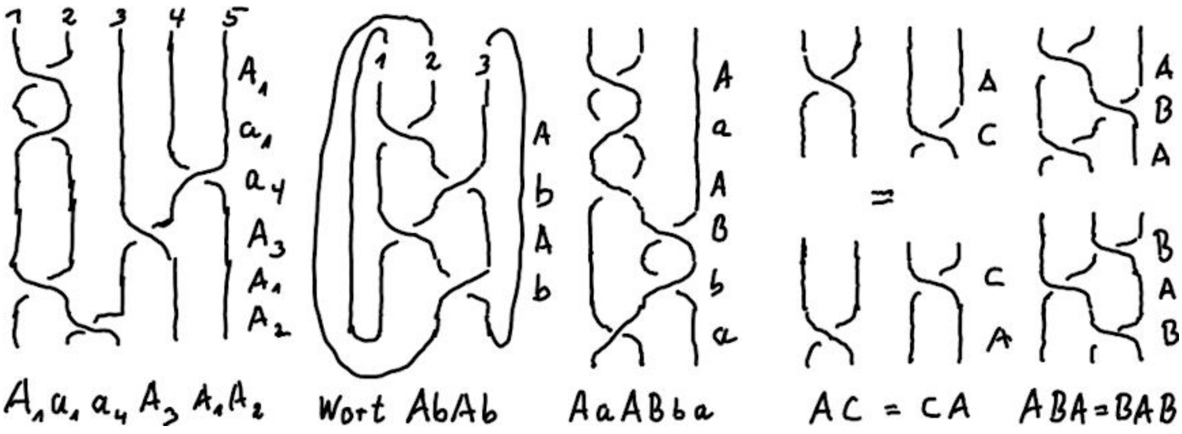


Abb. 13 Zöpfe und Zopfworte

Die Zopfworte eines Zopfes mit n Strängen können als Elemente einer Gruppe aufgefasst werden, deren erzeugende Elemente die A_i sind, denn es leuchtet unmittelbar ein, dass das Wort - oder Produkt - A_i a_i , wie es oben links auftritt, als Einselement genommen werden kann, dass also A_i und a_i zueinander invers sind. Diese Abfolge entspricht der zweiten Reidemeisterbewegung. Jeder Zopf hat seinen inversen Zopf: zu AbAb ist BaBa invers, denn AbAbBaBa=AbAeaBa=AbAaBa=…=e.

Assoziativität ist natürlicherweise gegeben und für die Abgeschlossenheit darf man die Wortlänge nicht begrenzen. Die Zopfgruppen sind nicht kommutativ, aber es gilt eine *Fernkommutativität.* In Abb. 13 ist dies mit AC=CA gezeigt. Der 3. Reidemeisterbewegung entspricht die Artin-Relation ABA=BAB.

Zwei Zöpfe sind isomorph (äquvalent, gleich), wenn sich ihre Zopfworte mit diesen Umformungen *algebraisch* ineinander überführen lassen.

In Abb.13 ist auch gezeigt, wie ein Zopf standardmäßig platzweise geschlossen wird: Aus dem AbAb-Zopf wird der 4_1 Primknoten. Es entstehen durch das Schließen von Zöpfen im Allgemeinen Knoten oder Verschlingungen. Zum Beispiel kann man den *Zopf* AaABba *kämmen*, es entstehen drei getrennte

Unknoten, algebraisch: AaABba=eAea=e. Der erste Zopf in Abb. 13 wird beim Schließen zu einem Knoten: Man verfolgt Strang 1, er geht zu Platz 3, Strang 3 geht nach 4, $4 \to 5$; $5 \to 2$; $2 \to 1$. Es gilt der zentrale

Satz von Alexander

Jeder Knoten kann durch Schließen eines Zopfes gewonnen werden.

Wie man einen solchen Zopf aus dem Knoten konstruiert, führt für diesen Beitrag zu weit. Im Absatz zu den Torusknoten (s.o.) war es günstig, diese als geschlossene Zöpfe aufzufassen.

Obwohl man für Zöpfe nun eine algebraische Beschreibung hat, gelang es dennoch nicht, direkt auf diesem Weg die Knoten zu klassifizieren. Die Versuche seit den 1930-iger Jahren führten allerdings zu weiteren Knoteninvarianten, z.B. 1980 zum Jones-Polynom[18] und 1997 zu einer algorithmischen Lösung für die Umformung von Zöpfen[19].

Didaktische Bemerkung

Die Zöpfe ermöglichen Lernenden mehr eigene Tätigkeit und Entdeckungen als die p-Etikettierbarkeit und Alexanderpolynome. Das überraschende Auftreten von algebraischen Vorgehensweisen in den Zopfgruppen erweitert und festigt die mathematische Bildung. In der Software KnotPlot lassen sich Zöpfe durch Eingabe der Zopfworte erzeugen. Überlegen die Lernenden erst selbst, was sich beim Schließen ergeben wird, kann die Antwort in 3D-Darstellung animiert vorgeführt werden. Verschlingungen werden verschiedenfarbig dargestellt. Mit Recht sind die Lernenden stolz, wenn sie richtig vorhergesagt haben. Dieses Training des genauen Sehens und des räumlichen Vorstellens ist auch für Schüler sinnvoll.

---

[18] [Epple] S.6

[19] Dehornoy, P.:L‘art de tresser, in Pout la sience, dossier hors série, April 1997 angegeben nach [Sossinskij] S. 157 und S. 57 ff.

Ausblicke und Anwendungen

Es ist klar, dass dieser Beitrag kein Lehrbuch der Knotentherie sein kann. Viele Knoteninvarianten und stark topologische Überlegungen sind fortgelassen. Auch Erweiterungen in höher dimensionale Räume fanden keine Berücksichtigung. Sossinskij[20] erwähnt Stoßrichtungen der Forschung und Vernetzung mit Physik und Statistik. Jedenfalls ist die Knotentheorie ein lebendiges und noch „unfertiges“ Forschungsgebiet.

Anwendungen der Knotentheorie haben sich in der Quantenfeldtheorie, der Chemie langer Moleküle, der Biologie der DNA-Ketten und in weiteren Gebieten ergeben. Die Theorie ist also nicht im Elfenbeinturm eingemauert, aber ich würde eine Unterrichtseinheit zur Knotentheorie nicht „anwendungsorientierten Unterricht“ nennen wollen.

Anschließende didaktische Bemerkungen

In ihrer Staatsexamensarbeit „Knotentheorie in der Schule“ gibt Sandra Gerhard[21] eine Einordnung der Knotentheorie in Bildungsstandards und Kompetenzanforderungen. Im fachwissenschaftlichen Teil stellt sie weitere schulisch (vermutlich) erreichbare Knoteninvarianten vor. Die Vorgehensweisen sind aber -verständlich im Hinblick auf den Zweck der Arbeit - so formal, dass sie m. E. in der vorgestellten Form nicht in die Schule passen. In der Lehrerausbildung würden Sie wohl ein ganzes Semester erfordern. S. Gerhard sagt aber richtig: „Mathematikunterricht verliert an Authentizität, wenn Handlungsorientierung mit Anwendung gleichgesetzt wird, [wenn…] innermathematischen Themen jegliche Verwendbarkeit im Mathematikunterricht abgesprochen wird.“[22]

---

[20] [Sossinskij] S. S141 ff u.a.

[21] [Gerhard]

[22] [Gerhard] S. 3

Ja, die Knotentheorie ist ein innermathematisches Thema, aber sie ist eine *mathematische Theorie*, deren Elemente und Grundgedanken „vor den Augen“ der Lernenden in Schule und Hochschule entsteht - unter Einbeziehung eigenen Handels und Denkens. Je nach bisheriger mathematischer Bildung wird Wissen vernetzt und der Blick auf Mathematik erweitert.

Literatur

[Budworth,2007] Budworth, Geoffrey; Paine, Roddy (2007): Knoten. Knoten, Schlaufen, Schlingen, Bindeknoten, Verkürzer, Steks. Genehmigte Sonderausg. Leichlingen: Krone. Üb. Wiebke Krabbe. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/198190073.

[Constantino] Constantino, Maria; Vondorff, Alexandra (2002): Das grosse Knoten-Handbuch. Sicher in Alltag, Sport, Freizeit. München: Bassermann. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/76400090.

[Epple] Epple, Moritz (©1999): Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie. Braunschweig: Vieweg. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/48928202 .

[Gerhard] Gerhard, Sandra: (2006) Knotentheorie in der Schule. Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt am Gymnasium Prüfer: Prof. Dr. Thomas Schick, Georg-August-Universität Göttingen. Online verfügbar unter http://www.uni-math.gwdg.de/schick/publ/KnotentheorieInDerSchule.pdf

[Haftendorn 1] Haftendorn, Dörte. (2010). Mathematik sehen und Verstehen, Heidelberg, Springer Spektrum Verlag http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de

[Haftendorn 2] Haftendorn, Dörte. (1996-2013) http://www.mathematik-verstehen.de Bereich Knotentheorie

[KnotPlot] Sharein, Rob: The KnotPlot Site, http://www.knotplot.com/ Autor:

[McLeavy] McLeay, Heather (1994): The knots puzzle book. Stradbroke, Diss, England: Tarquin Publications. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/31907086.

[Sossinskij] Alexander Sosinskij, Aleksej B. (2000): Mathematik der Knoten. Dt. Erstausg. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl. (rororo, 60930 : Sachbuch : rororo science). Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/76202819.

[Livingston] Livingston, Charles (1995): Knotentheorie für Einsteiger. Braunschweig: Vieweg. Online verfügbar unter http://www.worldcat.org/oclc/75626779.

Adresse der Autorin:

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Dipl. Math.
Barckhausenstr. 44
21335 Lüneburg

vormals
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Leuphana Universität Lüneburg
Scharnhorststr. 1
21335 Lüneburg

Haftendorn@uni.leuphana.de