In: **Kurven erkunden und verstehen**

Dörte Haftendorn, Springer 2017, **Website zum Buch**

7.7.2 Spannende Weiterführungen und Aufgaben

Aufgabe 7.5 Parabel als Vorstufe zu Bézierkurven

Ein faszinierendes Gebiet ist das „Design“ von Kurven aus wenigen Vorgaben. In meinem

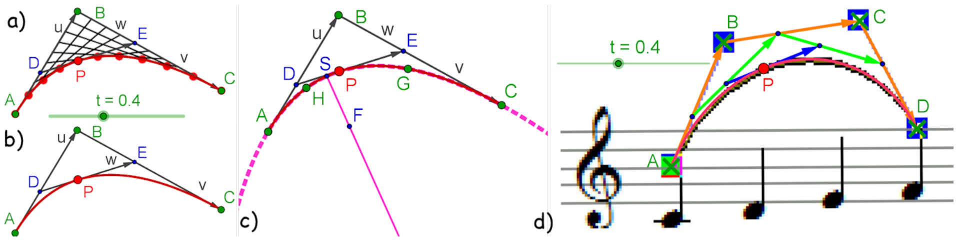

Abb. 7.7 Das Prinzip der Bézier-Kurven, a)-c) in einer Vorstufe, d) in der „echten“ Form.

Buch „Mathematik sehen und Verstehen“ sind in Abschnitt 9.2.4 die Bézier-Splines vorgestellt, deren Anwendung bei einem Bogen über Noten hier nochmals in Abb. 7.7 d) (hier) gezeigt ist. Für dieses Konzept zeige ich Ihnen nun eine Vorstufe, die zu Parabeln führt.

Ziel: Zu beliebigen drei Punkten A, B, C ist eine Parabel gesucht, die sich in der in Abb. 7.7 b) (hier) gezeigten Weise in das Dreieck A, B, C einschmiegt.

Vorgehensweise: Definieren Sie einen Parameter t als Schieberegler für den Bereich $[0, 1]$. Zeichnen Sie die Punkte und die Strecken u, v und Kreise mit den Radien $t\,u$ bzw. tv. Wenn Sie dann die Strecke $d = \overline{DE}$ haben, liefert der Kreis um D mit Radius $t\,d$ den gesuchten Punkt P. Die Ortslinie von P ist schon die Lösung.

Weiterführung: Abb. 7.7 a) (hier) zeigt mit dem Spurmodus zehn Stellungen von P. Setzen Sie nun zwei zugfeste Punkte H, G auf die Ortslinie und wählen Sie den Button „Kegelschnitt durch 5 Punkte“. GeoGebra zeigt dann die violett gestrichelte Linie. Die Theorie, die Sie weiter unten evt. selbst bewältigen, sagt, dass es eine Parabel ist. An der gezeigten Gleichung können Sie das nicht sehen, da die Parabel i. d. R. nicht achsenparallel liegt. Aber wenn Sie als Befehle `Brennpunkt`[···] und `Scheitel`[···] wählen, können Sie eine Achse einzeichnen. Letzte Sicherheit, dass es wirklich keine Ellipse oder Hyperbel ist, können Sie bekommen, wenn Sie die Achse der Figur in eine zu einer Koordinatenachse parallele Lage bringen und dann die bekannte Parabelgleichung sehen. Bestimmen Sie den Drehwinkel aus der Steigung und lassen Sie GeoGebra die Drehung ausführen. Skeptiker des handwerklichen Vorgehens sollten beachten, dass das Ergebnis „gedanklich“ exakt ist. Rundungsfehler des Systems werden nicht zu beobachten sein.

Rechnerische Bewältigung: Elegant ist eine vektorielle Behandlung, wie ich sie für die eigentlichen Bézier-Splines schon auf meiner Site [**?**] vorgeschlagen habe und Ihnen auch auf der Website zu diesem Buch zur Verfügung stelle. Wenn Sie den Weg übertragen, gelangen Sie zu der Parameterdarstellung der **Bézier-Parabel**

$$x(t) = (1-t)^2 A_x + 2t(1-t)B_x + t^2 C_x, \qquad y(t) = (1-t)^2 A_y + 2t(1-t)B_y + t^2 C_y. \quad (7.1)$$

Die Faktoren vor den Koordinaten der Steuerpunkte müsste man **Bernsteinpolynome 2. Grades** nennen. Wie immer sind die Dateien für den 2D- und den 3D-Fall auf der Website zum Buch.

Lösung: Die GeoGebra-Dateien zu b) und c) sind auf der Website. a) zeigt den Spurmodus aus der Datei zu b). Bewegen Sie die Steuerpunkte *wirklich!*.

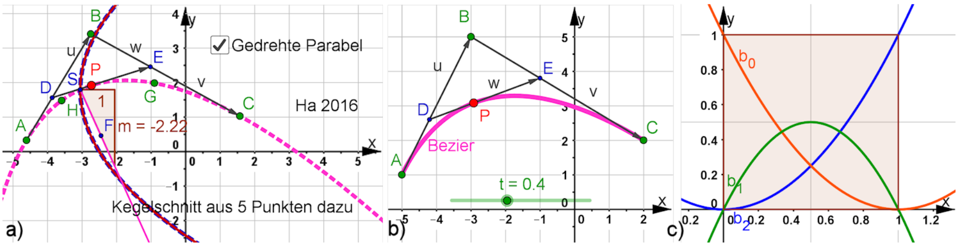

Abb. 7.8 **Bézier-Parabeln** a) Weiterführung mit Drehen der Bézier-Parabel, b) Schnelle Berechnung der Bezier-Parabel als Parameterkurve mit den Bernstein-Polynomen nach den Formeln unten, c) Bernstein-Polynome 2.Grades

Weiterführung Die Beschreibung in der Aufgabe führt zu Abb. 7.8 a). Die Steigung $m = \tan(\alpha)$ ergibt α im Bogenmaß. Damit kommt GeoGebra direkt zurecht, allerdings ist hier S mit dem Winkel $(-\alpha)$ gedreht. Im Gegensatz zur Behauptung im Buch ergibt sich aus den numerischen Ungenauigkeiten evt. doch noch der kleine Term $0.01\,x^2$, obwohl theoretisch eine Parabel gesichert ist. Aber wenn man an den nachträglich auf die Ortskurve gesetzten Punkten H oder G etwas zieht, gibt es Stellungen mit $0x^2$. Da die Ortskurve von GeoGebra selbst ein Spline ist, kommt es zu Abweichungen von der *wahren* Kurve. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit liegen die dick blau gestrichelte Kurve, die wirklich gedreht ist, und die rote Parabel, bei der etwa ein $0.01\,x^2$ einfach weggelassen wurde, aufeinander.

Rechnerische Bewältigung Im Folgenden seien $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ die Ortsvektoren der drei Steuerpunkte, die man sich mit Koordinaten gegeben denkt. Wie üblich sind $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ u. s. w. Der Parameter t laufe von 0 bis 1. Dann gilt $\vec{D} = \vec{A} + t\overrightarrow{AB} = \vec{A} + t(\vec{B} - \vec{A})$ und $\vec{E} = \vec{B} + t\overrightarrow{BC} = \vec{B} + t(\vec{C} - \vec{B})$ und schließlich $\vec{P} = \vec{D} + t\overrightarrow{DE} = \vec{D} + t(\vec{E} - \vec{D}) = \vec{A} + t\vec{B} - t\vec{A} + t\vec{B} + t^2\vec{C} - t^2\vec{B} - t\vec{A} - t^2\vec{B} + t^2\vec{A}$. Wenn wir dieses nach den Steuerpunkten sortieren, erhalten wir $\boldsymbol{\vec{P} = (1-t^2)\vec{A} + 2t(1-t)\vec{B} + t^2\vec{C}}$. Dabei heißen die drei Polynome $b_0(t) = (1-t)^2$, $b_1(t) = 2t(1-t)$ und $b_2(t) = t^2$ Bernsteinpolynome 2. Grades, nach dem russischen Mathematiker Sergei N. Bernstein, der sie 1911 vorstellte. Lesen Sie Wikipedia: Bernsteinpolynom. Unter Verwendung der (gegebenen) Koordinaten A_x, $B_x, \cdots$ der Steuerpunkte ist diese Vektorgleichung eine sehr griffige Parameterdarstellung der Bézierkurve, wie auch die Datei bezier-bernstein.ggb zeigt.

$$\begin{aligned} P_x = \;& A_x\, b_0(t) \;\; + B_x\, b_1(t) \;\; + C_x\, b_2(t) \\ P_y = \;& A_y\, b_0(t) \;\; + B_y\, b_1(t) \;\; + C_y\, b_2(t) \end{aligned}$$

Elimination von t mit Mathematica für Abb. 7.8 b) und Drehung mit GeoGebra bringt:
$c: \quad 49x^2 + 42xy + 9y^2 + 32x + 400y = 1264 \qquad c' : 58y^2 - 351.17y = 355.05x + 551.75.$