Splines & Co: Realisierung in GeoGebra,(wie TiNspire Ha 2012)

Kubische Splines mit 4 Punkten, mit GeoGebra-CAS

Definition eines kubischen Splines, der durch 4 frei gesetzte Punkte verläuft. Die Abszissen müssen verschieden sein.
Die Punkte kann man sich als Nägel vorstellen, durch die der Spline verlaufen soll.

Abbildung 1

p0(x):=apy+b0 (x-apx)+c0 (x-apx)^2+d0 (x-apx)^3

$\to$ $\mathbf{p0(x) := d0\,(-A1+x)^3 + 0\,(-A1+x)^2 + b0\,(-A1+x) + B1}$

p1(x):=bpy+b1 (x-bpx)+c1 (x-bpx)^2+d1 (x-bpx)^3

$\to$ $\mathbf{p1(x) := d1\,(-A2+x)^3 + c1\,(-A2+x)^2 + b1\,(-A2+x) + B2}$

p2(x):=cpy+b2 (x-cpx)+c2 (x-cpx)^2+d2 (x-cpx)^3

$\to$ $\mathbf{p2(x) := d2\,(-A3+x)^3 + c2\,(-A3+x)^2 + b2\,(-A3+x) + B3}$

gl0:=p0(bpx)=bpy

$\to$ $\mathbf{gl0 : 3\,b0 + 27\,d0 = 1}$

gl1:=p1(cpx)=cpy

$\to$ $\mathbf{gl1 : 3\,b1 + 9\,c1 + 27\,d1 + 1 = 4}$

gl2:=p2(dpx)=dpy

$\to$ $\mathbf{gl2 : 4\,b2 + 16\,c2 + 64\,d2 + 4 = 6}$

Jedes Polynom erreicht einen rechten Nachbarnagel.

Abbildung 2

Berechnung der 1. und 2. Ableitungen

p0(x)

Ableitung: $\mathbf{3\,d0\,x^2 + b0}$

s0(x):=$9

$\to$ $\mathbf{s0(x) := 3\,d0\,x^2 + b0}$

p1(x)

Ableitung: $\mathbf{3\,d1\,(x-3)^2 + 2\,c1\,(x-3) + b1}$

s1(x):=$11

$\to$ $\mathbf{s1(x) := 3\,d1\,(x-3)^2 + 2\,c1\,(x-3) + b1}$

s2(x):=Ableitung(p2(x), x)

$\to$ $\mathbf{s2(x) := 3\,d2\,(x-6)^2 + 2\,c2\,(x-6) + b2}$

ss0(x):=Ableitung(p0(x), x, 2)

$\to$ $\mathbf{ss0(x) := 6\,d0\,x}$

ss1(x):=Ableitung(p1(x), x, 2)

$\to$ $\mathbf{ss1(x) := 6\,d1\,x + 2\,c1 - 18\,d1}$

ss2(x):=Ableitung(p2(x), x, 2)

$\to$ $\mathbf{ss2(x) := 6\,d2\,x + 2\,c2 - 36\,d2}$

Abbildung 3

An den inneren Nägeln müssen Steigungen übergeben werden.

gl3:=s0(bpx)=s1(bpx)

$\to$ $\mathbf{gl3 : b0 + 27\,d0 = b1}$

gl4:s1(cpx)=s2(cpx)

$\to$ $\mathbf{gl4 : b1 + 6\,c1 + 27\,d1 = b2}$

An den inneren Nägeln müssen Krümmungen übergeben werden.

gl5:=ss0(bpx)=ss1(bpx)

$\to$ $\mathbf{gl5 : 18\,d0 = 2\,c1}$

gl6:=ss1(cpx)=ss2(cpx)

$\to$ $\mathbf{gl6 : 2\,c1 + 18\,d1 = 2\,c2}$

Gesucht sind 9 Variable b0,b1,b2,c0,....,d2, wir haben 7 Gleichungen.

Abbildung 4

Beim natürlichen Spline wird c0=0 gesetzt, d.h.: bei Start Kümmung 0.

gl7:c0=0

$\to$ $\mathbf{gl7 : c0 = 0}$

Hinten auch Krümmung 0, d.h. ss2(dpx)=0

gl8:=ss2(dpx)=0

$\to$ $\mathbf{gl8 : 2\,c2 + 24\,d2 = 0}$

Nun ist das Gleichungssystem mit 9 Varablen zu lösen

Abbildung 5

d:=Lösungen({gl0,gl1,gl2,gl3,gl4,gl5,gl6,gl7,gl8},{b0,c0,d0,b1,c1,d1,b2,c2,d2})

$$\to\ \mathbf{d := \begin{pmatrix} \frac{41}{318} & 0 & \frac{65}{2862} & \frac{118}{159} & \frac{65}{318} & -\frac{113}{2862} & \frac{287}{318} & -\frac{8}{53} & \frac{2}{159} \end{pmatrix}}$$

	A	B
1	0	0
2	3	1
3	6	4
4	10	6

Dies sind die Definitionen:

apx=A1, apy=B1

bpx=A2; bpy=B2

cpx=A3, cpy=B3

dpx=A4, dpy=B4

Man kann nun in die Funktionen die Lösungen einsetzen.
Durch h=Element(d,1) wird obiger Vektor eine Liste.
Dann ist Element(h,1) die Zahl 41/318 usw.
Die links stehenden Festlegungen muss man neu auswerten, wenn man die Punkte ändert.
Richtig interaktiv ist das vorläufig nicht.

a(x):=B1+41/318 (x-A1)+65/2862(x-A1)^3

$$\rightarrow\ a(x) := \frac{65}{2862}x^3 + \frac{41}{318}x$$

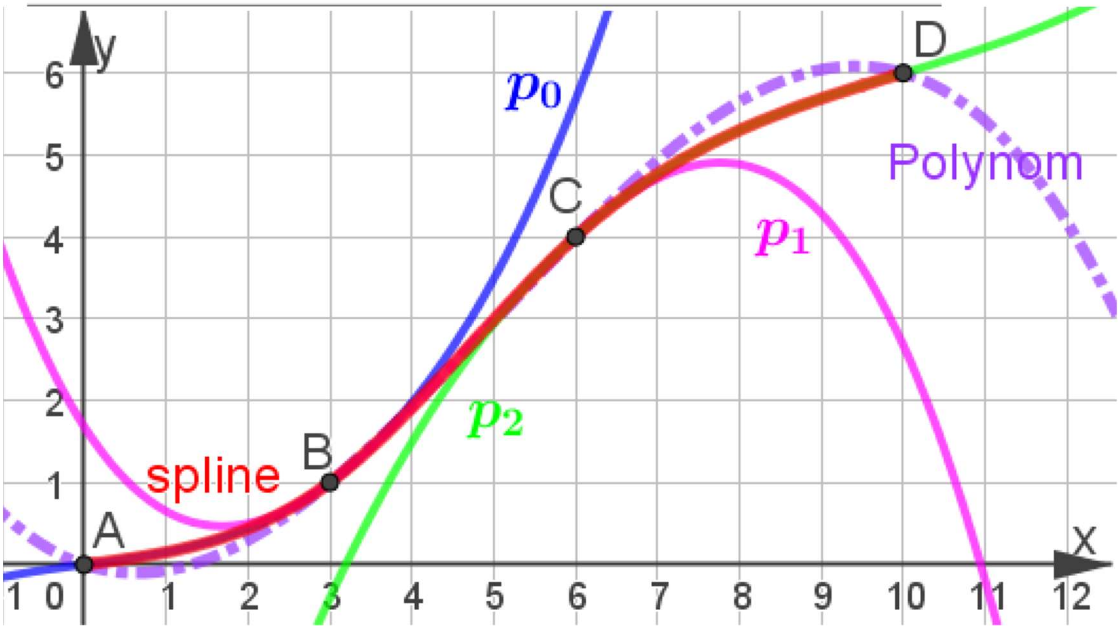
b(x):=B2+118/159(x-A2)+65/318(x-A2)^2-113/2862(x-A2)^3

$$\rightarrow\ b(x) := -\frac{113}{2862}x^3 + \frac{89}{159}x^2 - \frac{493}{318}x + \frac{89}{53}$$

c(x):=B3+287/318(x-A3)-8/53(x-A3)^2+2/159 (x-A3)^3

$$\rightarrow\ c(x) := \frac{2}{159}x^3 - \frac{20}{53}x^2 + \frac{1295}{318}x - \frac{507}{53}$$

Für diese drei Funktionen wurde aber von Hand übertragen.



Das **Intepolationspolynom** hat „unschöne Ausschwinger“, **Splines sind besser.**

GeoGebra-dazu ist spline4pkte-ggb.ggb ,

die ebenso gebaute TI Nspire-Datei ist spline4pkte-ti.tns, dort kann man an den Punkten ziehen.