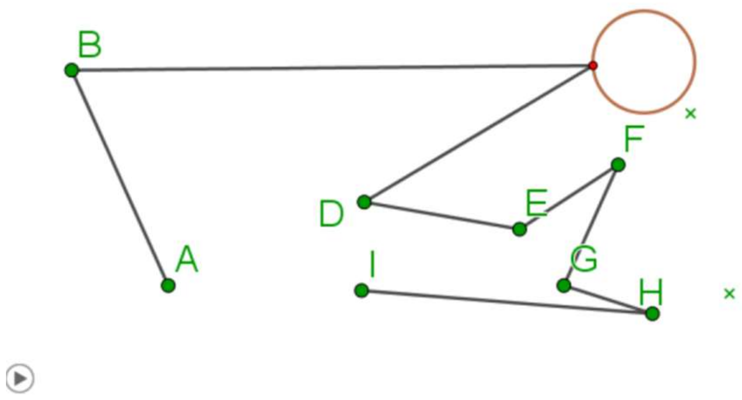
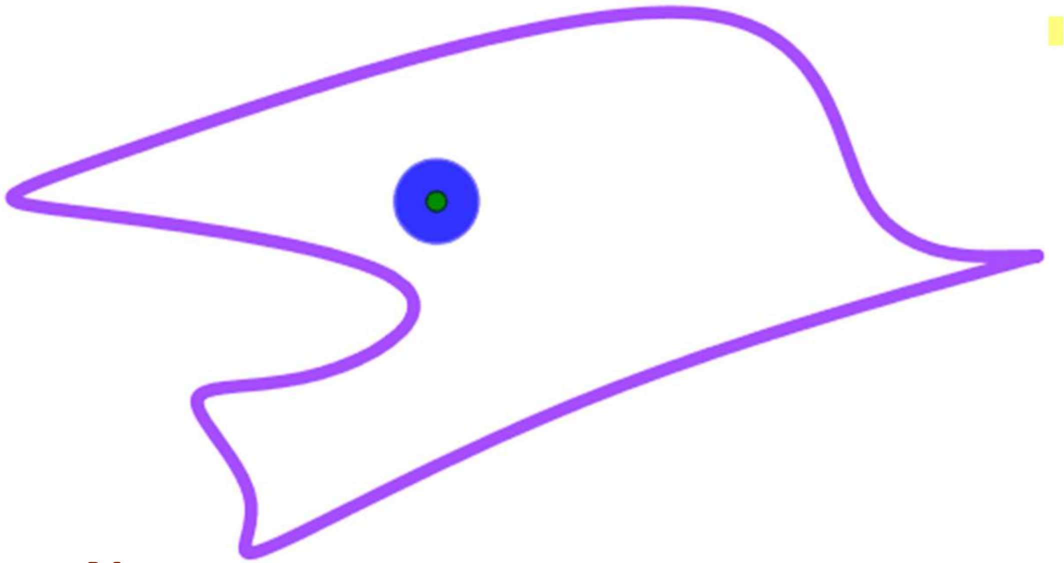
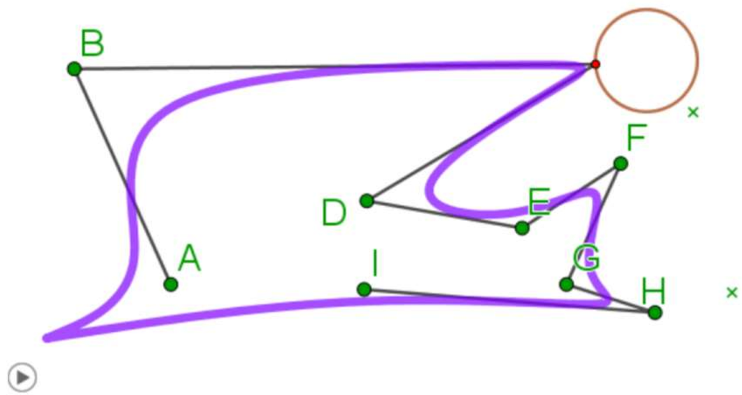
# NURBS
# Grundlage für Animationsfilme

12. September 2021  Saarbrücken, AK Geometrie der GDM






**N** • **N**imm Steuerpunkte

**U** • **U**nd ein Basissystem (z.B. Polynome),

**R** • **R**ichtige Linearkombination.

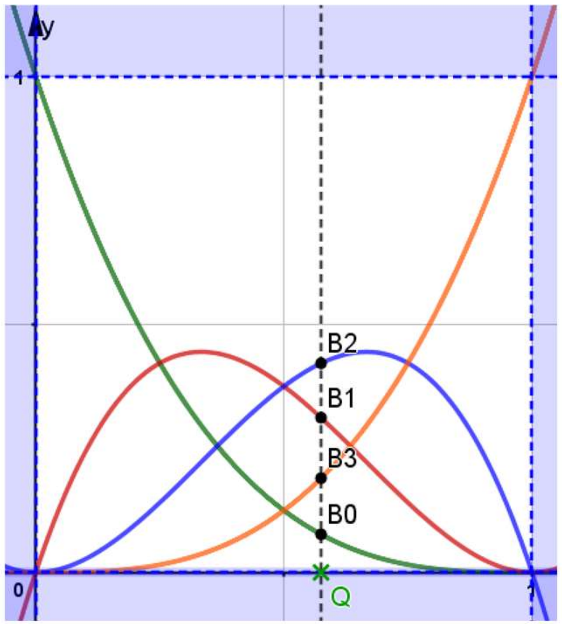
**B** • **B**ald ist „Karl“ fertig.

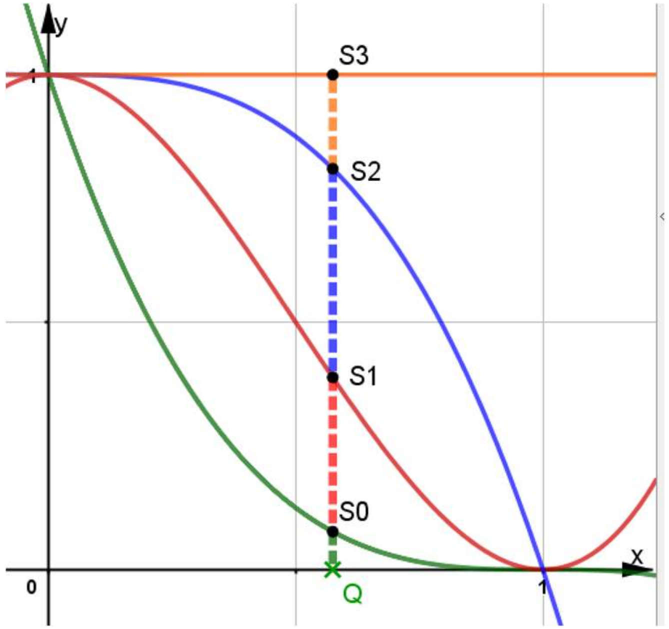
**S** • **S**o macht „Karl“  jede geometrische Bewegung brav mit, z.B. eine Spiegelung.

# Bézier-Splines

## Die Bernsteinpolynome

## bilden eine Basis im $\Pi(3)$




Die Summe der Ordinaten ist an jeder Stelle 1.

Wegen $((1-x)+x)^3 = 1$

Interaktiv auch zu sehen

$b0(x) = (1 - x)^3$

$b1(x) = 3x\,(1 - x)^2$

$b2(x) = 3\,(1 - x)\,x^2$

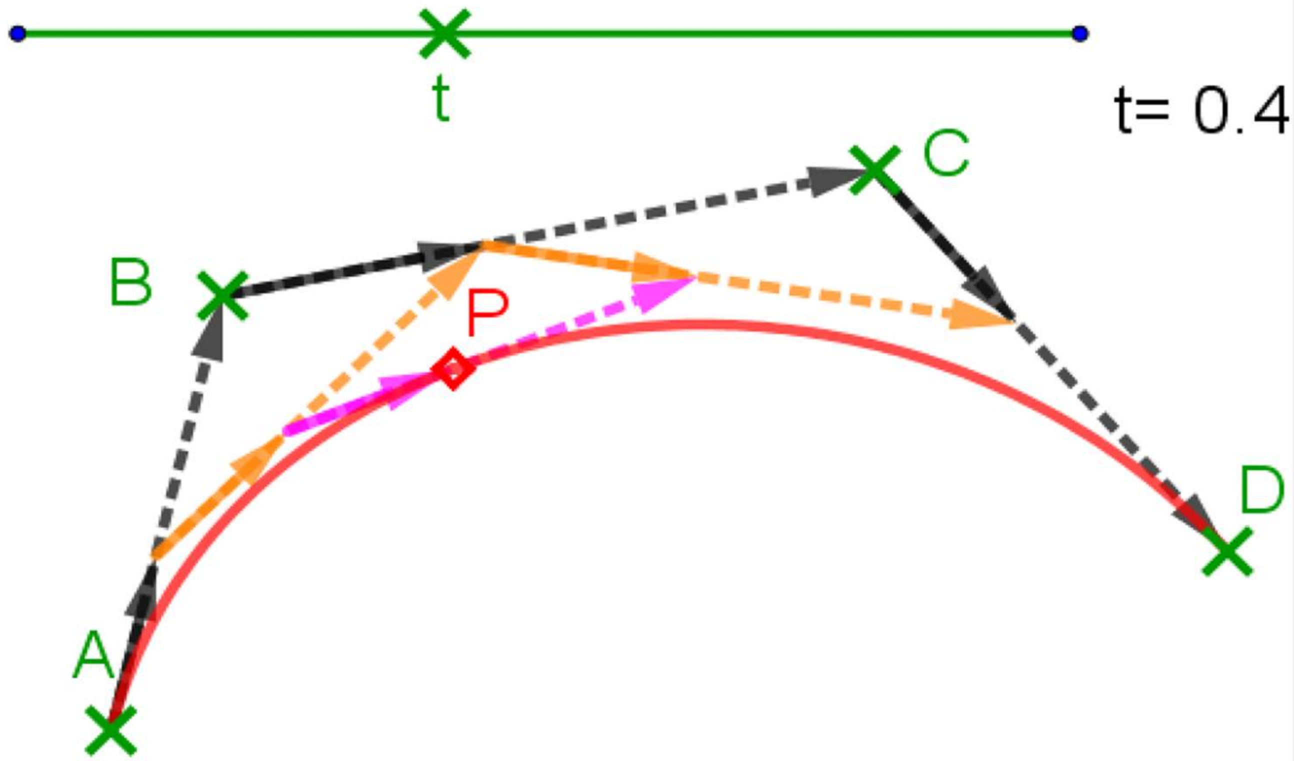
$b3(x) = x^3$

Polynome 3. Grades

3 Nullstellen genau für x=0 und x=1

Sämtliche Möglichkeiten.

# Bézier-Spline, eine geometrische Erzeugung





z.B. Seite 369

Ein vektorieller Beweis ergibt die Bernsteinpolynome

**Parameterdarstellung der Bézierkurve**

$$\vec{P} = (1-t)^3\vec{A} + 3(1-t)^2 t\vec{B} + 3(1-t)t^2\vec{C} + t^3\vec{D}$$

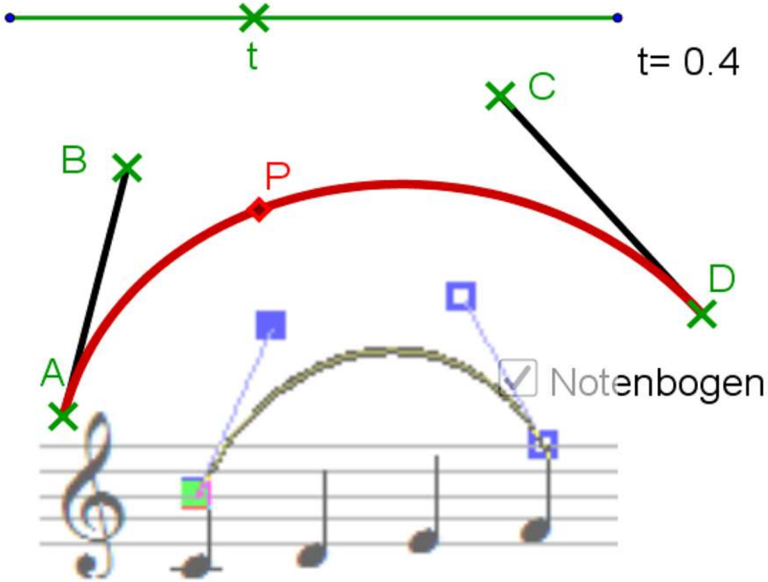
# Bézier-Spline, eine rechnerische Erzeugung

Bézier-Spline als Parameterkurve
Basis sind die Bernsteinpolynome

$$x(t)=A_x\, b_0(t)+B_x\, b_1(t)+C_x\, b_2(t)+D_x\, b_3(t)$$

$$y(t)=A_y\, b_0(t)+B_y\, b_1(t)+C_y\, b_2(t)+D_y\, b_3(t)$$

$b0(x) = (1 - x)^3$
$b1(x) = 3x\,(1 - x)^2$
$b2(x) = 3\,(1 - x)\,x^2$
$b3(x) = x^3$




In GeoGebra:

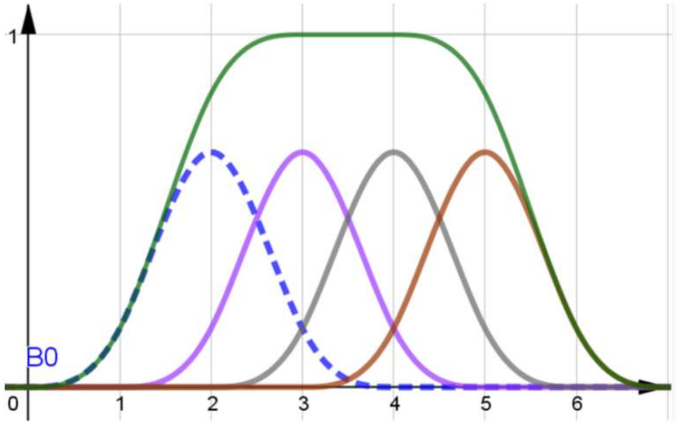
Kurve(x(t),y(t),t,0,1)

# Weiterführende Spline-Konzepte

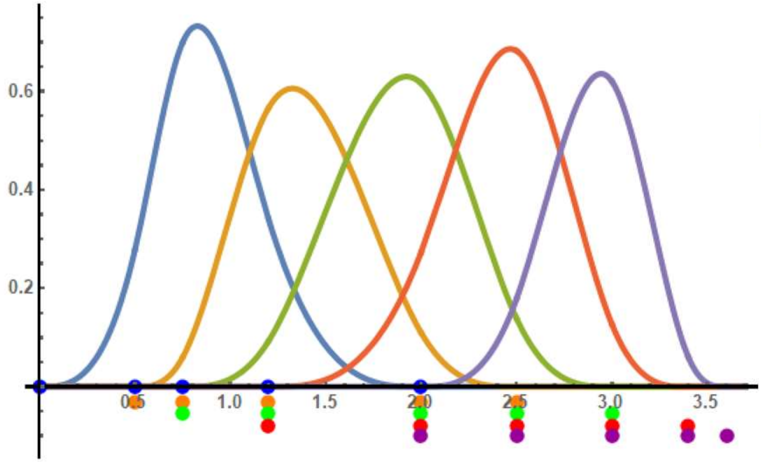
## B-Splines und NURBS

Basis-
Polynome

Summe 1




Intervallbreite 4

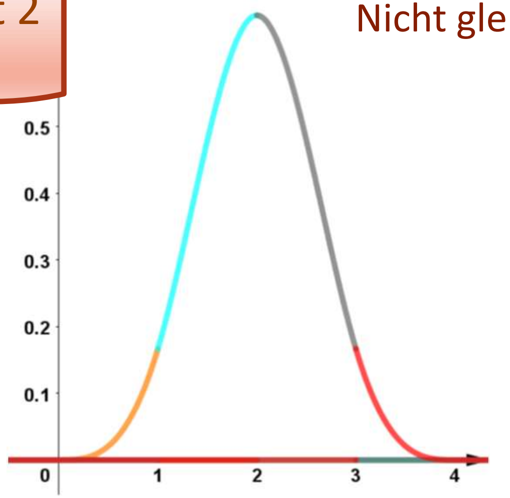



Non Uniform Rational B-Splines

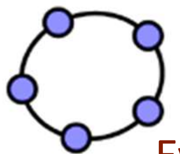
Nicht gleichförmige rationale B-Splines

Sind das Polynome 4. Grades mit 2 doppelten Nullstellen?

LEIDER NEIN!
Die Grundfunktion
$B_{0,3}(t)$ ----------
besteht aus 4 Teilen

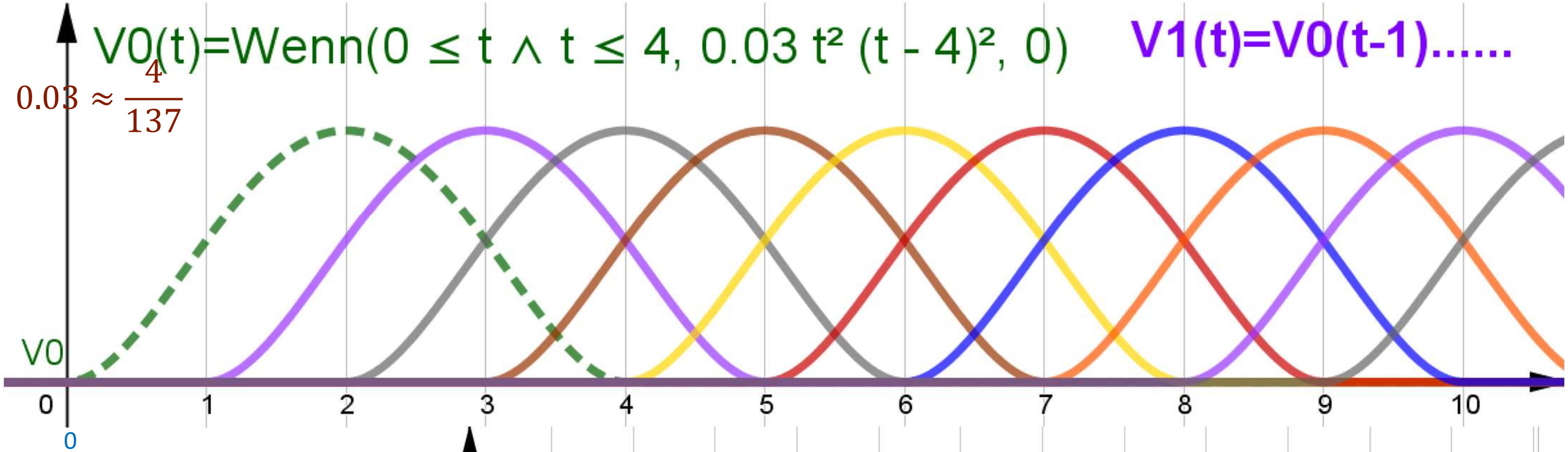



ABER:



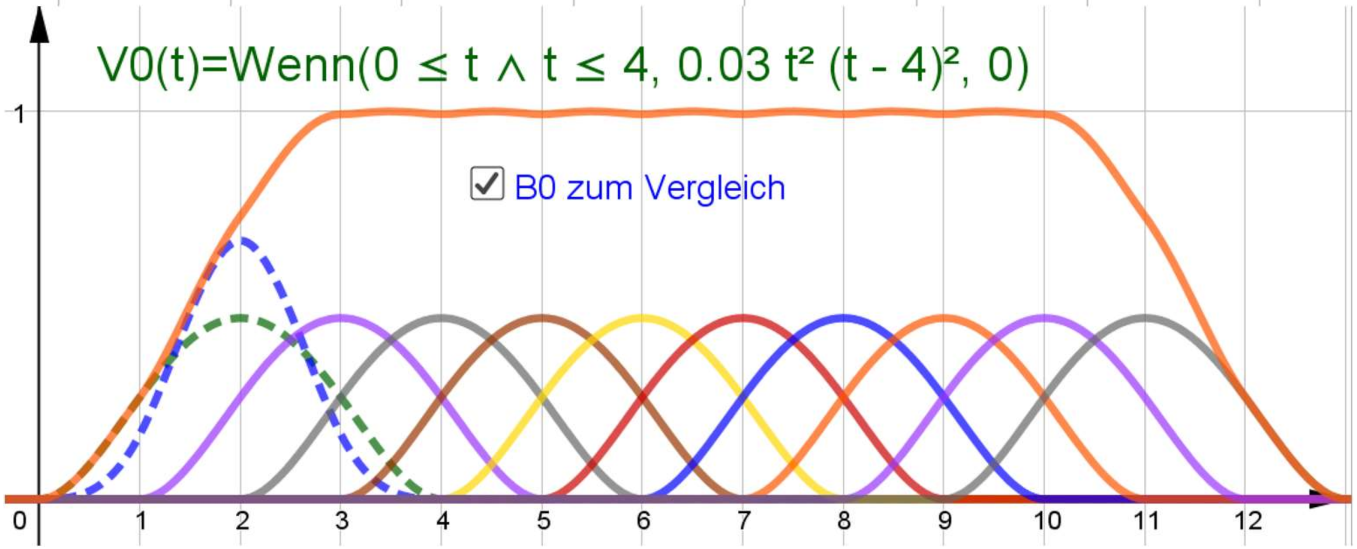
Evt.

# „Didaktische“ NURBS mit Polynomen 4.Grades



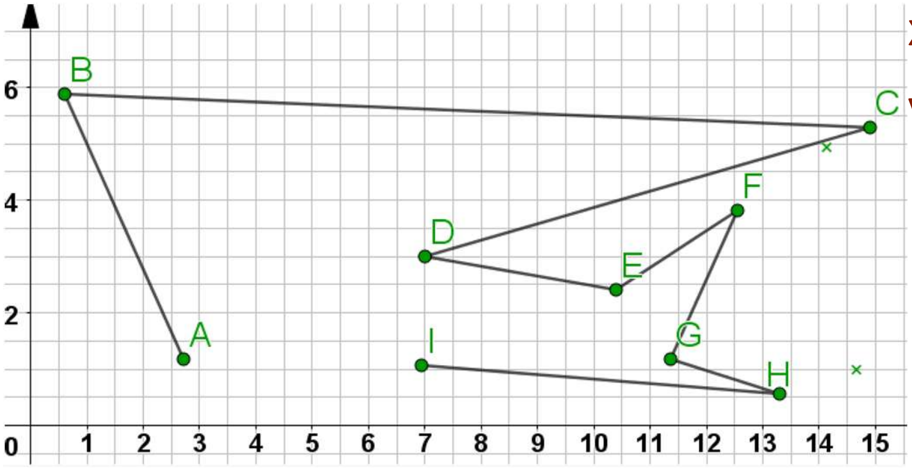

Summe 1,
ist das wahr?

LEIDER
knapp vorbei!




$B_{0,3}$ hat Sattel-Nst, $V_0$ hat nur doppelte Nst.

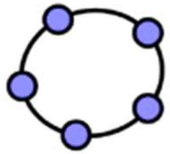
# „Didaktische“ B-Splines



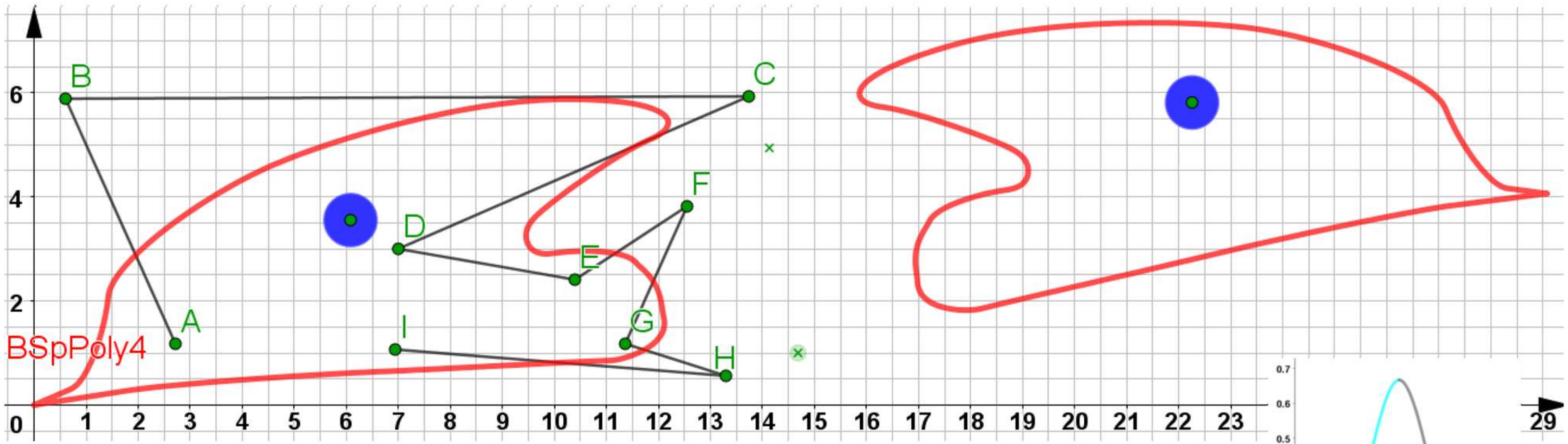

$x(t)=A_xV_0(t)+ B_xV_0(t-1)+ C_xV_0(t-2)+ \ ....$

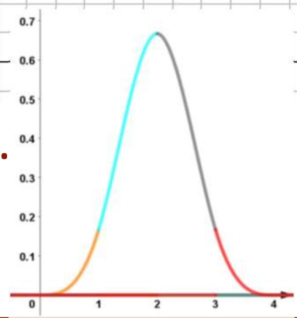
$y(t)=A_yV_0(t)+ B_yV_0(t-1)+ C_yV_0(t-2)+ \ ....$

Kurve(x(t),y(t),t,0,13)



Karl +
Karlo

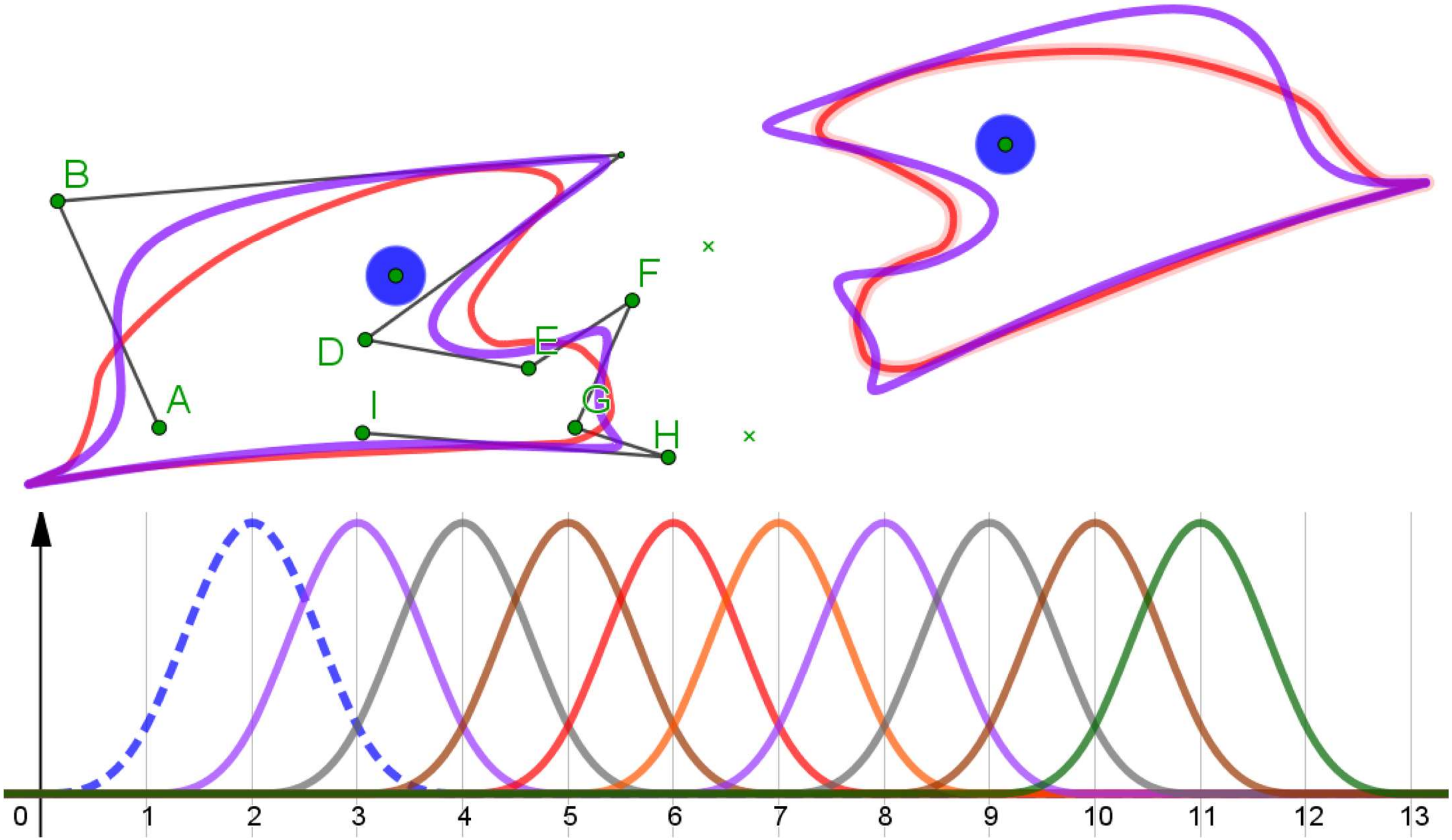


Basispolynome vom Grad 4 aber die Summe war nicht konstant 1.

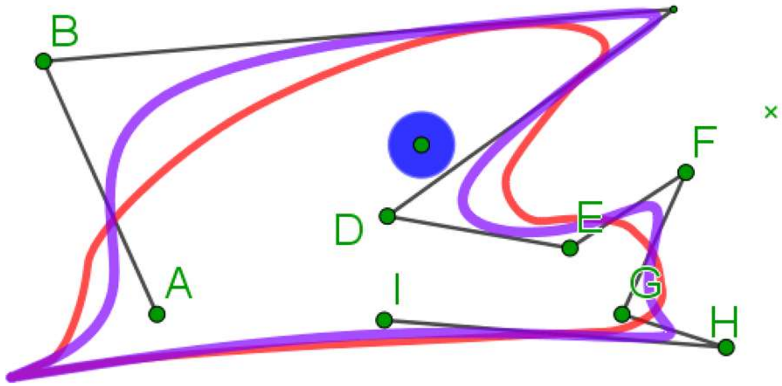
B-Splines haben gestückelte Basispolynome vom Grad 3
und die Summe ist genau konstant 1.

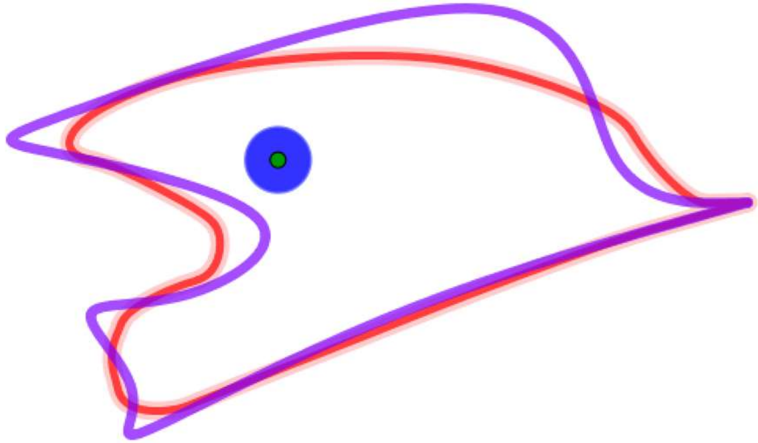
# Violett: NURBS mit echten B-Splines

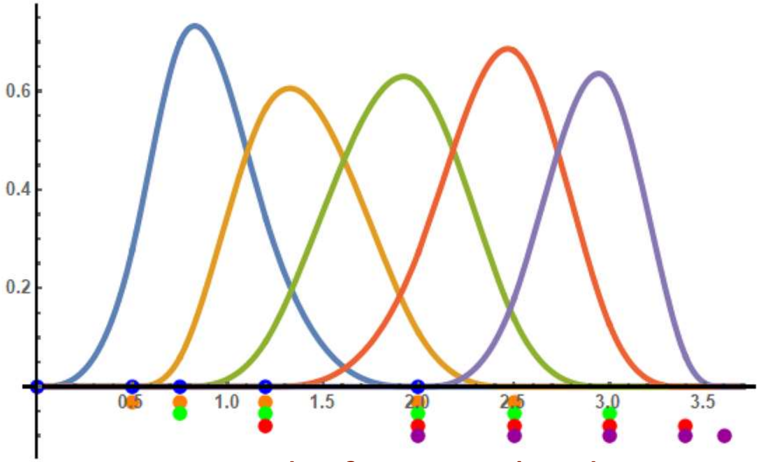



Basis für B-Splines, sie werden gleich erklärt. Stets sind nur p+1=4 Basis-Elemente wirksam.

# Vergleich der Möglichkeiten für NURBS





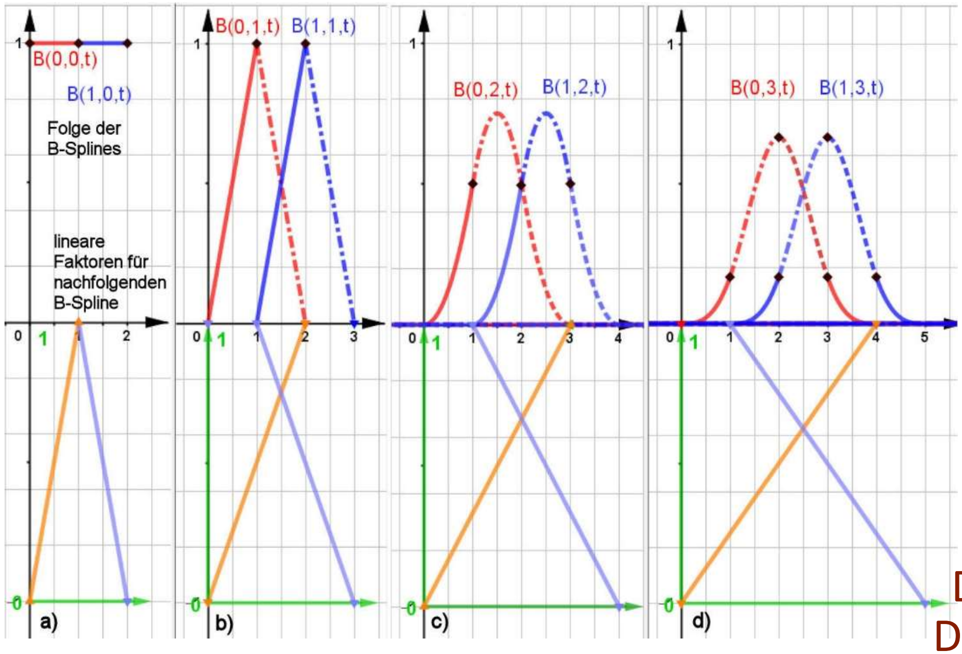

Der NURBS mit echten B-Splines ist „glatter“ und reagiert feiner auf die Steuerpunkte.

Die Einfachversion mit Polynomen 4. Grades ist „ didaktische Erfindung“ und nicht so edel.

NURBS
- dürfen verschiedene Knotenabstände haben.
- die Basiselemente können gewichtet sein.
- sie müssen stets Summe 1 haben.

**Wie sind die echten B-Splines definiert?**

# Rekursive Definition der B-Splines




$B_{0,2}(t)= \frac{t}{2}\cdot B_{0,1}(t)+\frac{3-t}{2}\cdot B_{1,1}(t)$

$B_{1,2}(t)=B_{0,2}\,(t-1)$

Bestehen aus 3 Parabelstücken

$B_{0,3}(t)= \frac{t}{3}\cdot B_{0,2}(t)+\frac{4-t}{3}\cdot B_{1,2}(t)$

$B_{1,3}(t)=B_{0,3}\,(t-1)$

Bestehen aus 4 Stücken aus Polynomen 3. Grades

Die gelben Geraden bilden [0,p] auf [0,1] ab.
Die blauen Geraden bilden [1,p+1] auf [0,1] ab.

$$B_{0,0}(t)=1 \quad \text{für} \quad 0\le t\le 1 \quad \text{und} \quad 0 \quad \text{sonst.}$$

Verschiebungsregel *p*=Polynomgrad

$$B_{i,p}(t) := B_{0,p}(t-i) \quad \text{für} \quad i\ge 1 \text{und} \quad p\ge 0$$

also $B_{1,0}(t)=1$

Multiplikation mit den Geraden darunter, p->p+1

also $B_{0,1}(t)=t\cdot B_{0,0}(t)+(2-t)\cdot B_{1,0}(t),$

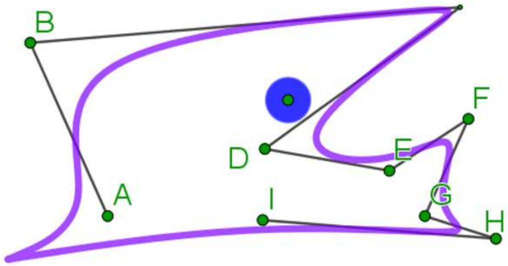
$B_{1,1}(t)=B_{0,1}\,(t-1)$

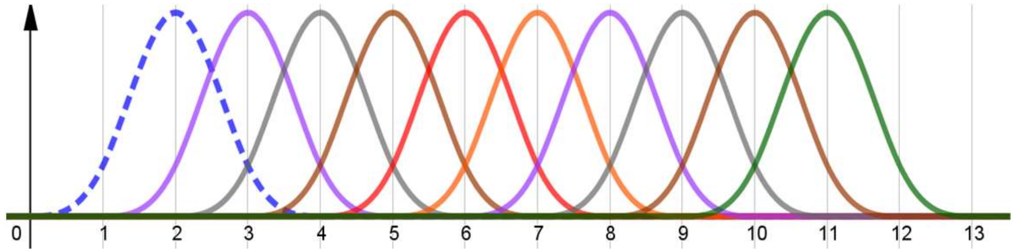
B-Splines 3. Grades reichen in der Praxis

Mit der Verschiebungsregel erzeugt man für n Steuerpunkte (mindestens) n solche „Hügel“.

# NURBS mit B-Splines vom Grad 3 sind hier mit „Knoten“ vom Abstand 1

In jedem Intervall der Breite 1 bilden 4 Hügel eine Basis.




„Karl“ ist die Parameterkurve

$x(t)=A_xB_{0,3}(t)+ B_xB_{1,3}(t)+ C_xB_{2,3}(t)+ D_xB_{3,3}(t)+ E_xB_{4,3}(t)+ F_xB_{5,3}(t)+ G_xB_{6,3}(t)+ H_xB_{7,3}(t)+ I_xB_{8,3}(t)$

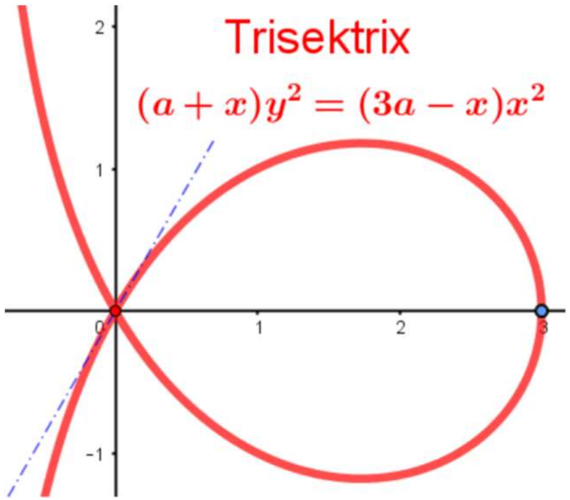
$y(t)=A_yB_{0,3}(t)+ B_yB_{1,3}(t)+ C_yB_{2,3}(t)+ D_yB_{3,3}(t)+ E_yB_{4,3}(t)+ F_yB_{5,3}(t)+ G_yB_{6,3}(t)+ H_yB_{7,3}(t)+ I_yB_{8,3}(t)$

Bei den NURBS dürfen die Knoten in beliebigen Abständen sein.
Ihre B-Spline-Basispolynome vom Grad 3 sind gewichtet,
so dass weiterhin sind ihre Summe für jedes t gleich 1 ist.


Seite 379

*Was aber nicht im Buch steht,*
*zeige ich nun:*

# Exakte Geometrie mit NURBS?



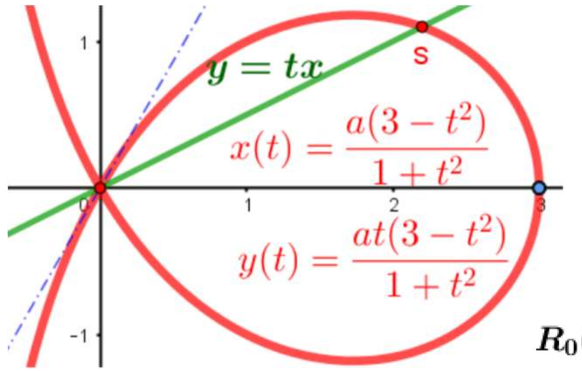

Die Trisektrix hat eine implizite Gleichung 3. Grades, kann man sie mit NURBS darstellen?

1. Rationale Parametrisierung?
2. Geeignete rationale Basis?
3. Geeignete Steuerpunkte?


Zu 2. Basis mit gewichteten rationalen **Bernsteinpolynomen**

$$R_i = \frac{w_i b_i}{\Sigma_{j=0}^{3} w_j b_j} \text{ für } i = 0..3$$

Keine B-Splines,
nur 4 Steuerpunkte




Bestimmung der Gewichte aus dem Nenner durch Koeffizientenvergleich:

$$w_0 = 1,\ w_1 = 1,\ w_2 = \frac{4}{3},\ w_3 = 2$$

Verwendung der Gewichte in den Zählern ergibt für die Basis:

$$R_0(t) = \frac{(1-t)^3}{t^2+1},\ R_1(t) = \frac{3(1-t)^2 t}{t^2+1},\ R_2(t) = \frac{4(1-t)t^2}{t^2+1},\ R_3(t) = \frac{2t^3}{t^2+1}$$

Zu 1. Diese findet man als Geradenschnittpunkt einer geeigneten Geraden.

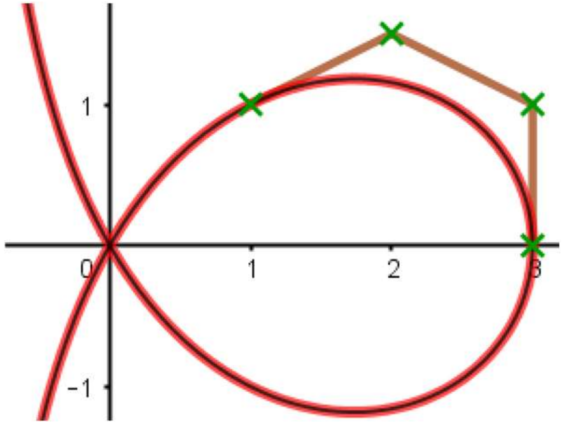
Zu 3. Bestimmung der Koordinaten der Steuerpunkte durch Koeffizientenvergleich mit den Zählern von $x(t)$ und $y(t)$

$$a(3-t^2) = A_x R_0^* + B_x R_1^* + C_x R_2^* + D_x R_3^*$$

$a = 1$

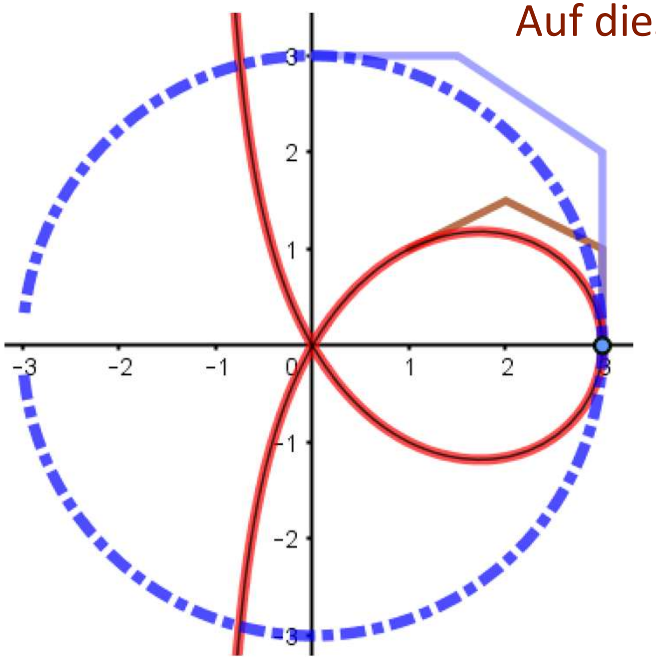
$R_i^*$ =nur Zähler $\quad at(3-t^2) = A_y R_0^* + B_y R_1^* + C_y R_2^* + D_y R_3^*$

# Exakte Trisektrix und Kreis mit NURBS



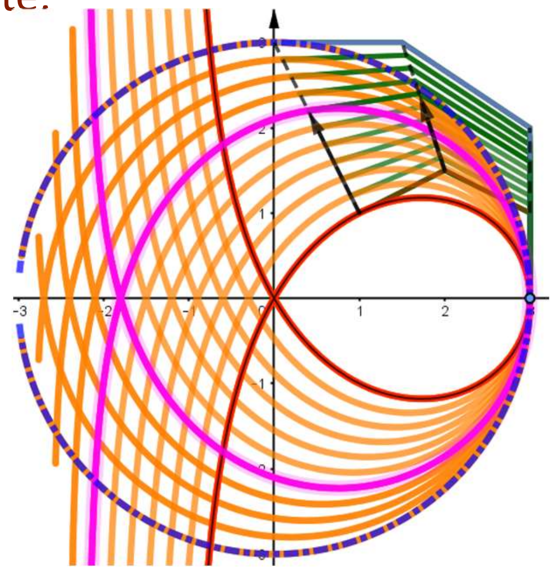
$$A = (3a, 0), B = (3a, a), C = \left(2a, \frac{3a}{2}\right), D = (a, a)$$

*Überraschung*



Auf dieselbe Art ergibt sich mit einer Geraden $y = t(x + r)$

eine rationale Parameterdarstellung für den Kreis
und die gezeigten Steuerpunkte.

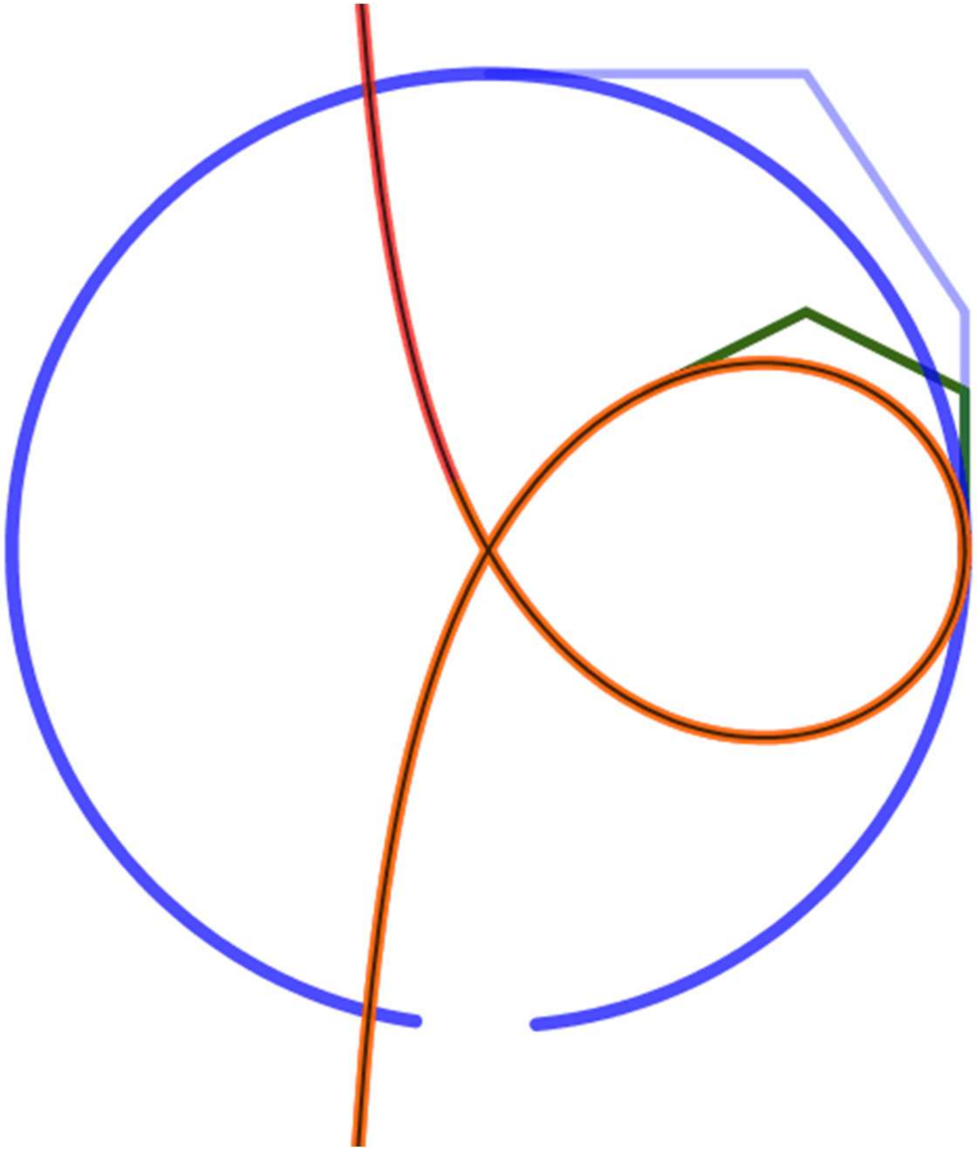


$$x(t) = \frac{r(1 - t^2)}{1 + t^2},$$

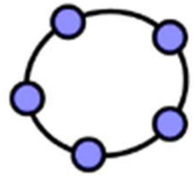
$$y(t) = \frac{2rt}{1 + t^2}$$

Durchlauf +

# Andere Parameterdarstellung des Kreises



*Weitere Überraschung*



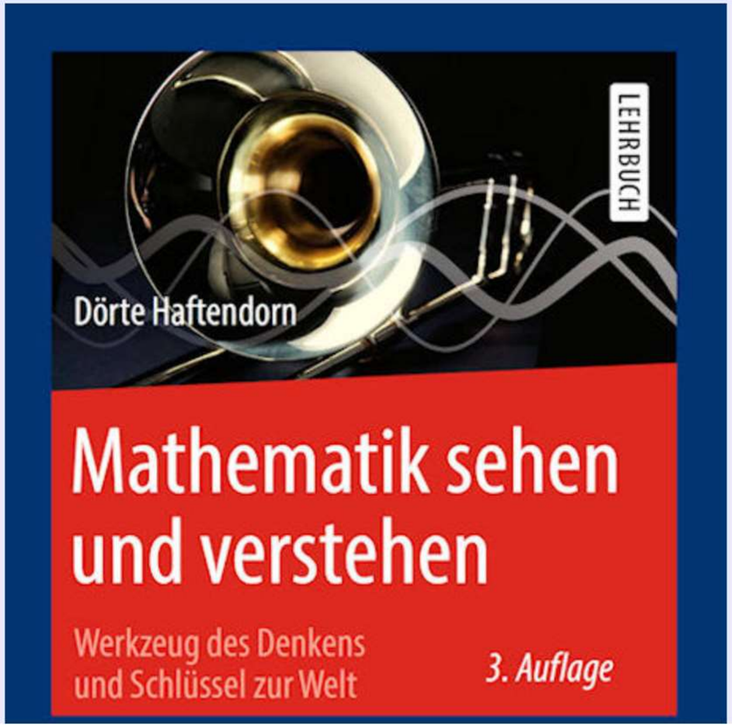
$$x(t) = \frac{2rt}{1+t^2},$$

$$y(t) = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2}$$

Durchlauf -

# Lesen Sie ausführlicher in den Büchern

| Mathematik sehen und verstehen | Höhere Mathematik sehen und verstehen |
|---|---|





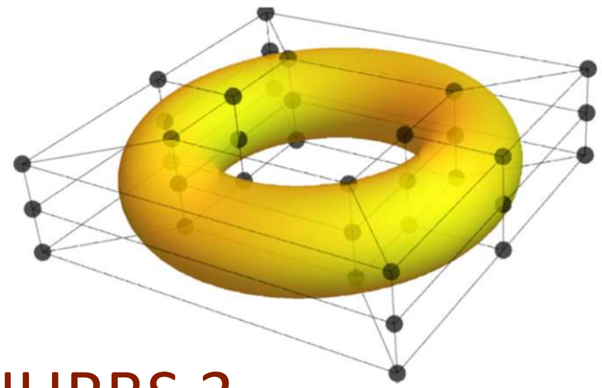
Numerik, 9.2.4, S 248

Splines+NURBS in 5.3 bis 5.4

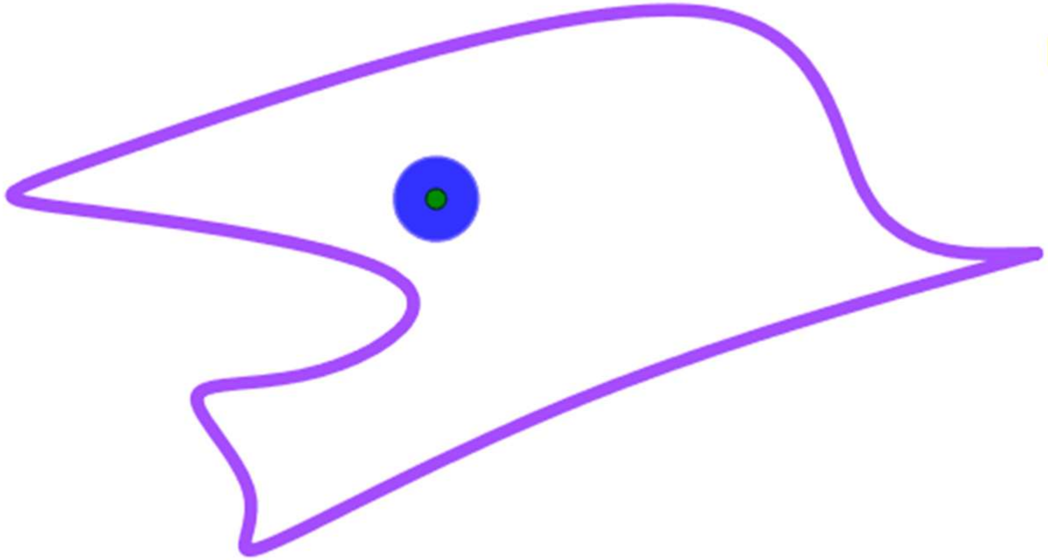
*Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien finden Sie im Bereich Vorträge*

# NURBS
## Grundlage für Animationsfilme

12. September 2021 Saarbrücken, AK Geometrie der GDM



NURBS 3 …



# Vielen Dank
# für Ihre Aufmerksamkeit

*Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien finden Sie im Bereich Vorträge*