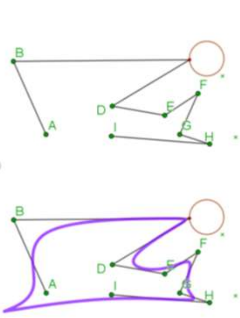
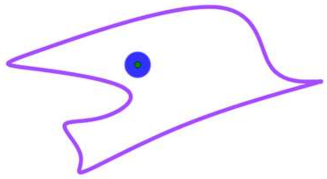
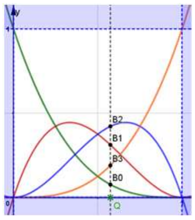
NURBS
Grundlage für Animationsfilme
14. Juni 2022 Münster, Behnke-Kolloquium





- **N** Nimm Steuerpunkte
- **U** Und ein Basissystem (z.B. Polynome),
- **R** Richtige Linearkombination.
- **B** Bald ist „Karl“ fertig.
- **S** So macht „Karl“ jede geometrische Bewegung brav mit, z.B. eine Spiegelung.

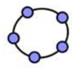
Bézier-Splines
Die **Bernsteinpolynome** bilden eine Basis im $\Pi(3)$



b0(x) = (1 - x)³
b1(x) = 3x (1 - x)²
b2(x) = 3 (1 - x) x²
b3(x) = x³

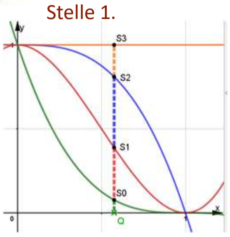
Wegen ((1-x)+x)³ =1 ist die Summe der Ordinaten an jeder Stelle 1.

Polynome 3. Grades
3 Nullstellen genau für x=0 und x=1

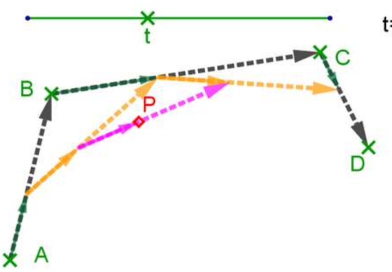


Interaktiv auch zu sehen, Evt.

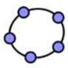
Es sind sämtliche Möglichkeiten.
Herleitung gleich!



Bézier-Spline, eine geometrische Erzeugung



t= 0.4



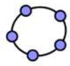
Ein vektorieller Beweis ergibt die Bernsteinpolynome

z.B. Seite 369

Parameterdarstellung der Bézierkurve

$$\vec{P} = (1-t)^3\vec{A} + 3(1-t)^2t\vec{B} + 3(1-t)t^2\vec{C} + t^3\vec{D}$$

Dadurch ist der Bézier-Spline eine Parameterkurve

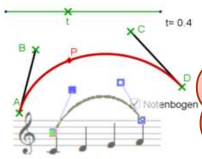


Linearkombination der Bernsteinpolynome
mit den Steuerpunkten als Koeffizienten

$x(t)=A_x\, b_0(t)+B_x\, b_1(t)+C_x\, b_2(t)+D_x\, b_3(t)$

$y(t)=A_y\, b_0(t)+B_y\, b_1(t)+C_y\, b_2(t)+D_y\, b_3(t)$

b0(x) = (1 - x)³
b1(x) = 3x (1 - x)²
b2(x) = 3 (1 - x) x²
b3(x) = x³



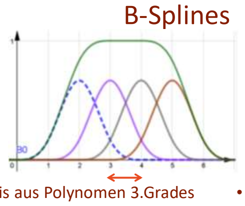
Notenprogramm Capella®

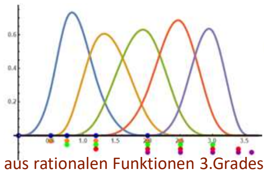
Problem: Fortsetzung mit mehr Steuerpunkten

In GeoGebra:

Kurve(x(t),y(t),t,0,1)

Weiterführende Spline-Konzepte
B-Splines und NURBS als ZIEL





- Basis aus Polynomen 3.Grades
- Intervallbreite 4
- Nutzbar an den Stellen, an denen 4 Basisfunktionen wirken

- Basis aus rationalen Funktionen 3.Grades
- Intervallbreiten **nicht notwendig*** gleich
- Nutzbar an den Stellen, an denen 4 Basisfunktionen wirken

Im Nutzungsbereich ist die Summe 1

Non Uniform Rational B-Splines

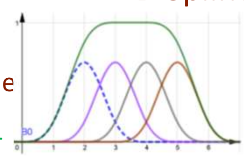
Nicht gleichförmige rationale B-Splines

NURBS mit B-Splines sind also **spezielle** NURBS.

B-Splines

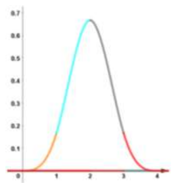
Basis-Polynome

Summe 1

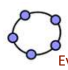


Sind das Polynome 4. Grades mit 2 doppelten Nullstellen?

LEIDER NEIN!
Die wahre Grundfunktion
$B_{0,3}(t)$ ----------
besteht aus 4 Teilen



ABER:

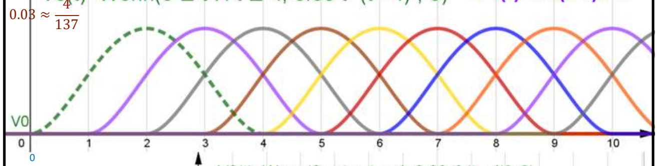


Evt.

„Didaktische“ NURBS mit Polynomen 4.Grades

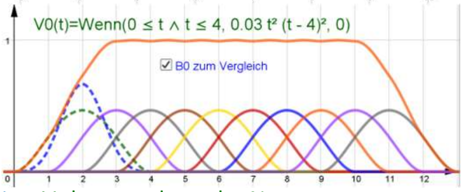
V0(t)=Wenn(0 ≤ t ∧ t ≤ 4, 0.03 t² (t - 4)², 0) V1(t)=V0(t-1)......

$0.03 \approx \frac{4}{137}$



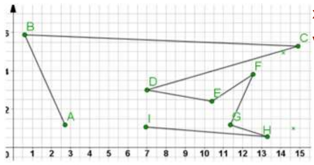
Summe 1,
ist das wahr?

LEIDER
knapp vorbei!



$B_{0,3}$ hat Sattel-Nst, V_0 hat nur doppelte Nst.

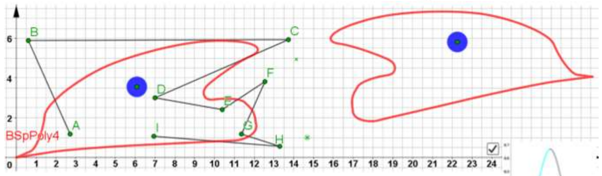
Dennoch: „Didaktische“ B-Splines

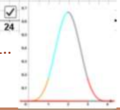


$x(t)=A_xV_0(t)+ B_xV_0(t-1)+ C_xV_0(t-2)+$ ....
$y(t)=A_yV_0(t)+ B_yV_0(t-1)+ C_yV_0(t-2)+$ ....

Kurve(x(t),y(t),t,0,13)

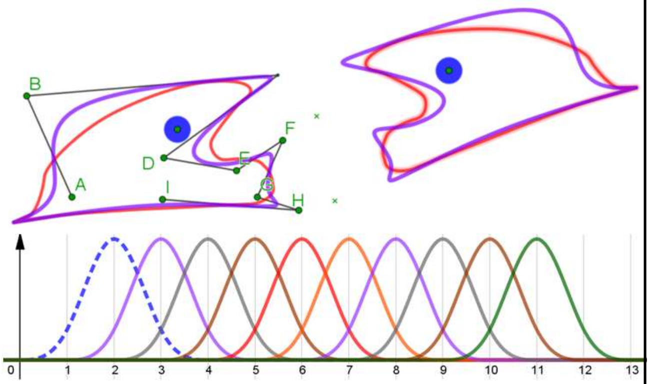
Karl +
Karlo





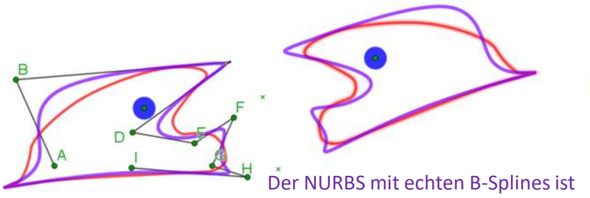
Basispolynome vom Grad 4, aber die Summe war nicht konstant 1..
B-Splines haben gestückelte Basispolynome vom Grad 3
und die Summe ist genau konstant 1.

Violett: NURBS mit echten B-Splines



Basis für B-Splines, sie werden gleich erklärt. Stets sind nur p+1=4 Basis-Elemente wirksam.

Vergleich der Möglichkeiten für NURBS



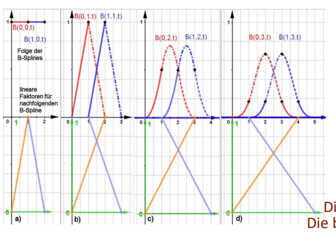
Warum eigentlich Summe 1?

Bildet man die Steuerpunkte P_i affin ab, so ist zu wünschen, dass der Spline aus den Bildpunkten $P_i{}'$ auch wirklich mit dem **affinen Bild** des Ur-Splines übereinstimmt. Wegen $P \to AP + \vec{b}$ muss dafür aber $\sum_{i=0}^{3} B_i\vec{b} = \vec{b}$ gelten. Also muss $\sum_{i=0}^{3} B_i = 1$ sein.

Der NURBS mit echten B-Splines ist „glatter“ und reagiert feiner auf die Steuerpunkte.
Die Einfachversion mit Polynomen 4. Grades ist „didaktische Erfindung“ und nicht so edel.
Aber Lernende können sie **selbst** finden.

Wie sind die echten B-Splines definiert?

Rekursive Definition der B-Splines



$B_{0,2}(t)= \frac{t}{2} \cdot B_{0,1}(t) + \frac{3-t}{2} \cdot B_{1,1}(t)$
$B_{1,2}(t)=B_{0,2}(t-1)$
Bestehen aus 3 Parabelstücken

$B_{0,3}(t)= \frac{t}{3} \cdot B_{0,2}(t) + \frac{4-t}{3} \cdot B_{1,2}(t)$
$B_{1,3}(t)=B_{0,3}(t-1)$
Bestehen aus 4 Stücken aus Polynomen 3. Grades

Die gelben Geraden bilden [0,p] auf [0,1] ab.
Die blauen Geraden bilden [1,p+1] auf [0,1] ab.

$B_{0,0}(t) = 1 \quad \text{für} \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{und} \quad 0 \quad \text{sonst.}$

Verschiebungsregel p=Polynomgrad

$B_{i,p}(t) := B_{0,p}(t-i) \quad \text{für} \quad i \ge 1 \text{und} \quad p \ge 0$

also $B_{1,0}(t)=1$

B-Splines 3. Grades reichen in der Praxis.
Zweifache Differenzierbarkeit reicht.

Multiplikation mit den Geraden darunter, p->p+1

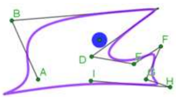
also $B_{0,1}(t) = t \cdot B_{0,0}(t) + (2-t) \cdot B_{1,0}(t).$

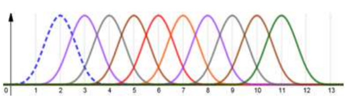
$B_{1,1}(t)=B_{0,1}(t-1)$

Mit der Verschiebungsregel erzeugt man für n Steuerpunkte (mindestens) n solche „Hügel“.

NURBS mit B-Splines vom Grad 3 sind hier mit „Knoten“ im Abstand 1 gezeigt

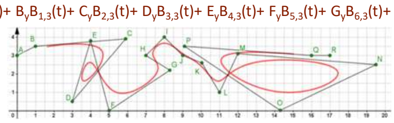
In jedem Intervall der Breite 1 bilden 4 Hügel eine Basis.





„Karl“ ist die Parameterkurve

$x(t)=A_xB_{0,3}(t)+ B_xB_{1,3}(t)+ C_xB_{2,3}(t)+ D_xB_{3,3}(t)+ E_xB_{4,3}(t)+ F_xB_{5,3}(t)+ G_xB_{6,3}(t)+ H_xB_{7,3}(t)+ I_xB_{8,3}(t)$
$y(t)=A_yB_{0,3}(t)+ B_yB_{1,3}(t)+ C_yB_{2,3}(t)+ D_yB_{3,3}(t)+ E_yB_{4,3}(t)+ F_yB_{5,3}(t)+ G_yB_{6,3}(t)+ H_yB_{7,3}(t)+ I_yB_{8,3}(t)$



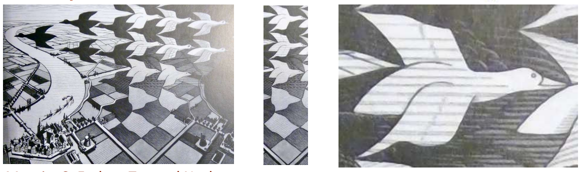
Seite 379

Kreativen Erfindungen sind Tor und Tür geöffnet!

Ein Beispiel, das nicht im Buch steht, zeige ich nun:

Escher-Metamorphose

mit B-Splines-NURBS mit vom Grad 3



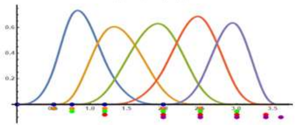
Mauritz C. Escher: Tag und Nacht

Idee aus einem biographischen Film, bei dem Tiere aus den Bildern krabbeln.

NURBS, Non Uniform Rational B-Splines

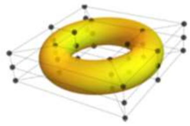
$$R_i = \frac{w_i b_i}{\Sigma_{j=0}^{3} w_j b_j} \quad \text{für } i = 0..3$$

- Die b_i sind **B-Splines** oder **Béziersplines**.
- Die w_i reelle **Gewichte**.
- Der Nenner garantiert „**Summe 1**“.



- Die Intervallgrenzen werden **Knoten** genannt.
- Eine **Knotenliste** nennt die Parameter der Knoten.
- Es kann auch **mehrfache Knoten** geben.
- Die Abstände der Knoten sind **beliebig**.
- Der Polynomgrad p kann höher als 3 sein

Mit NURBS lässt sich jede stückweise rational parametrisierbare Kurve darstellen.

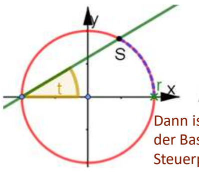


NURBS 3D
sind heute für frei gestaltete aber auch „exakte“ Formen weit verbreitet.

NURBS für exakte geometrische Objekte

Der Kreis als NURBS

$$R_i = \frac{w_i b_i}{\Sigma_{j=0}^{3} w_j b_j} \quad \text{für } i = 0..3$$



Eine **rationale Parametrisierung** kann man evt. finden, indem man eine parametrisierte Gerade durch einen bekannten Punkt mit einer Kurve zum Schnitt bringt.

$S = \left(\frac{r(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2rt}{1+t^2}\right)$ $\qquad C = \sum_{i=0}^{p} A_i R_i$

Dann ist die Kurve als Linearkombination der Basisfunktionen R_i darstellbar. Die Gewichte w_i und die Steuerpunkte A_i sind passend zu bestimmen.

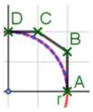
Für den Nenner ergibt sich mit Béziersplines die folgende Bedingung:

$$w_0(1-t)^3 + w_1 3(1-t)^2 t + w_2 3(1-t)t^2 + w_3 t^3 = 1 + t^2$$

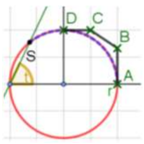
Koeffizientenvergleich liefert die Gewichte: $(w_0, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 4/3, 2)$

Der Nenner der R_i ist damit gesichert. Die Zähler müssen erfüllen:

$$A_x(1-t)^3 + B_x 3(1-t)^2 t + C_x 4(1-t)t^2 + D_x 2t^3 = r(1-t^2)$$
$$A_y(1-t)^3 + B_y 3(1-t)^2 t + C_y 4(1-t)t^2 + D_y 2t^3 = 2rt$$



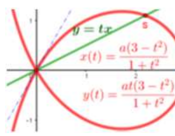
Damit werden die Steuerpunkte: A=(r,0), B=(r,2/3r), C=(r/2,r), D=(0,r)



Exakte Geometrie mit NURBS ist also möglich.

S. 380f Die obige Herleitung ist vollständiger.

Was aber nicht im Buch steht, zeige ich nun:

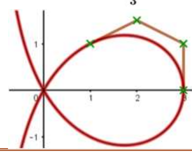


Die Trisektrix hat die implizite Gleichung $(a+x)y^2 = (3a-x)x^2$

Mit einer Geraden durch den singulären Punkt findet man eine rationale **Parametrisierung** (s. links) 3. Grades.

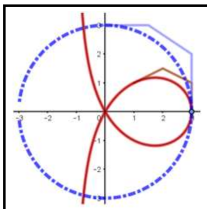
Überraschung Sie hat denselben Nenner und damit auch dieselben Basispolynome, die wir beim Kreis berechnet haben.

$w_0 = 1,\ w_1 = 1,\ w_2 = \frac{4}{3},\ w_3 = 2 \quad R_0(t) = \frac{(1-t)^3}{t^2+1},\ R_1(t) = \frac{3(1-t)^2 t}{t^2+1},\ R_2(t) = \frac{4(1-t)t^2}{t^2+1},\ R_3(t) = \frac{2t^3}{t^2+1}$

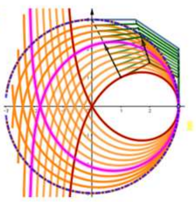


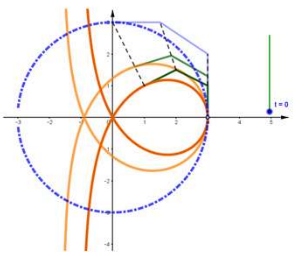
Auf die oben gezeigte Art ergeben sich folgende Steuerpunkte, dabei ist $3a$ die Schlaufenbreite:

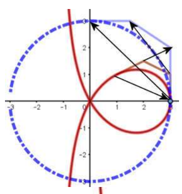
$$A = (3a, 0),\ B = (3a, a),\ C = \left(2a, \frac{3a}{2}\right),\ D = (a, a)$$



Metamorphose von der Trisektrix zum Kreis



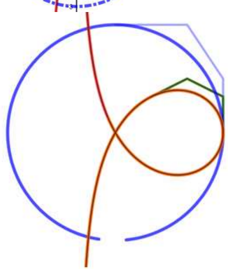




Metamorphose von der Trisektrix zum Kreis, der nun negativ durchlaufen wird

$$x(t) = \frac{2rt}{1+t^2},$$
$$y(t) = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2}$$

So steht es im Buch.
Durchlauf negativ



Überraschende Volte

Lesen Sie ausführlicher in den Büchern

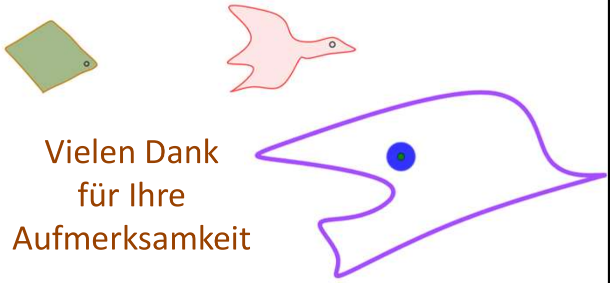
Numerik, 9.2.4, S 248 Splines+NURBS in 5.3 bis 5.4

Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien finden Sie im Bereich Vorträge

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 19

NURBS
Grundlage für Animationsfilme

14. Juni 2022 Münster, Behnke-Kolloquium



Vielen Dank
für Ihre
Aufmerksamkeit

Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien finden Sie im Bereich Vorträge

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 20