Höhere Mathematik sehen und verstehen,

Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021 Interaktive Version mit kostenlosem Mathematica Player

Kreis mit rationalen Bézierspines

Herleitung einer Parameterdarstellung für den Kreis

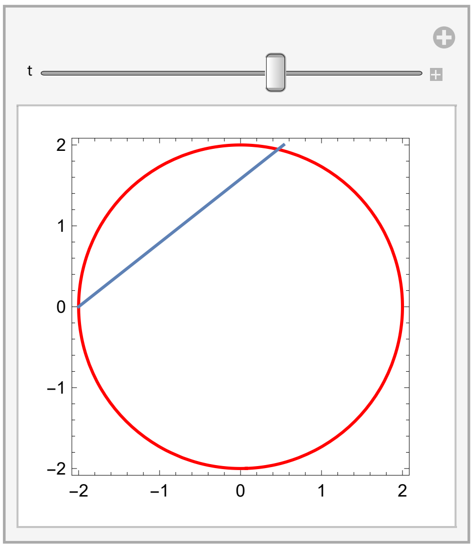
Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch einen geeigneten Startpunkt schneidet den Kreis.
Die Steigung t dieser Geraden eignet sich als Parameter.
Ziehe t im interaktiven Kasten.

- Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

In[ ]:=
```
r = 2; Kreis = ContourPlot[{x^2 + y^2 == r^2
                 Konturgraphik
   }, {x, -r, r}, {y, -r, r}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
                               Seitenverhältnis    Konturenstil      rot
```

In[ ]:=
```
Manipulate[Show[Kreis, Plot[t (x + r), {x, -r, r}, PlotRange → {-r, r}]],
manipuliere  zeige an     stelle Funktion graphisch dar   Koordinatenbereich der Graphik
  {{t, -0.4}, -3, 3}, SaveDefinitions → True]
                        speichere Definitionen  wahr
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
r =.; Solve[{x^2 + y^2 == r^2, y == t (x + r)}, {x, y}]
```
löse

```
(*Schnittpunkte der Geraden durch A=(-r,0) mit dem Kreis*)
```

Out[ ]= $\left\{\{x \to -r, y \to 0\}, \left\{x \to \frac{r - r t^2}{1 + t^2}, y \to \frac{2 r t}{1 + t^2}\right\}\right\}$

- Das ist nun eine Parameterdarstellung des Kreises

Definition rationaler Bézierspline-Basis

Bernsteinpolynome

In[ ]:=
```
b[0, t_] := (1 - t)^3;
b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;
b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t); b[3, t_] := t^3
```

In[ ]:=
```
Rw =.
```

In[ ]:= Rw[i_, t_] := $\frac{\texttt{ww[i]} \times \texttt{b[i, t]}}{\texttt{Sum[ww[j]} \times \texttt{b[j, t], \{j, 0, 3\}]}}$;

```
Rw[i, t]
```

Out[ ]= $\frac{b[i, t] \times ww[i]}{(1 - t)^3\, ww[0] + 3\, (1 - t)^2\, t\, ww[1] + 3\, (1 - t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]}$

- Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

In[ ]:= $\left\{x \to r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, y \to r \frac{2 t}{1 + t^2}\right\}$ (*Kreis, Radius r*)

Out[ ]= $\left\{x \to \frac{r\,(1 - t^2)}{1 + t^2}, y \to \frac{2 r t}{1 + t^2}\right\}$

Die Gewichte müssen aus dem Nenner bestimmt werden.

In[ ]:=
```
nenner = Sum[ww[j] × b[j, t], {j, 0, 3}]
```
summiere

Out[ ]= $(1 - t)^3\, ww[0] + 3\, (1 - t)^2\, t\, ww[1] + 3\, (1 - t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]$

```
CoLi = CoefficientList[nenner, t]
```
Liste der Koeffizienten

(* für Koeffizientenvergleich, Liste Koeff von $\{1,t,t^2,t^3\}$*)

Out[ ]= {ww[0], -3 ww[0] + 3 ww[1], 3 ww[0] - 6 ww[1] + 3 ww[2], -ww[0] + 3 ww[1] - 3 ww[2] + ww[3]}

In[ ]:=
```
lo = Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
```
löse

Out[ ]= $\left\{\left\{ww[0] \to 1, ww[1] \to 1, ww[2] \to \frac{4}{3}, ww[3] \to 2\right\}\right\}$

Also sind die Gewichte (übrigens ebenso wie für die Trisektrix)

```
In[∘]:= W = {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]} /. lo⟦1⟧
```

Out[∘]= $\left\{1, 1, \frac{4}{3}, 2\right\}$

```
In[∘]:= nenner = Sum[ww[i] × b[i, t], {i, 0, 3}] /. lo⟦1⟧ // Simplify  (* wie erwartet*)
                 summiere                                   vereinfache
```

Out[∘]= $1 + t^2$

- Vergleich der Bernsteinpolynome mit der rationalen Version

Steuerpunkte für den Kreis

Punkte

```
In[∘]:= P = {{Ax, Ay}, {Bx, By}, {Cx, Cy}, {Dx, Dy}};
```

x-Werte

```
In[∘]:= Zx = Ax (1 - t)^3 + Bx 3 (1 - t)^2 t + Cx 4 (1 - t) t^2 + 2 Dx t^3 // Expand
                                                                     multipliziere
```

Out[∘]= $Ax - 3\,Ax\,t + 3\,Bx\,t + 3\,Ax\,t^2 - 6\,Bx\,t^2 + 4\,Cx\,t^2 - Ax\,t^3 + 3\,Bx\,t^3 - 4\,Cx\,t^3 + 2\,Dx\,t^3$

```
In[∘]:= Zx = r - r t^2;
```

Koeffizientenvergleich

```
In[∘]:= lox = Solve[{Ax == r, -3 Ax + 3 Bx == 0,
              löse
           3 Ax - 6 Bx + 4 Cx == -r, -Ax + 3 Bx - 4 Cx + 2 Dx == 0}, {Ax, Bx, Cx, Dx}]
```

Out[∘]= $\left\{\left\{Ax \to r,\ Bx \to r,\ Cx \to \frac{r}{2},\ Dx \to 0\right\}\right\}$

y-Werte

```
In[∘]:= Zy = Ay - 3 Ay t + 3 By t + 3 Ay t^2 - 6 By t^2 + 4 Cy t^2 - Ay t^3 + 3 By t^3 - 4 Cy t^3 + 2 Dy t^3
```

Out[∘]= $Ay - 3\,Ay\,t + 3\,By\,t + 3\,Ay\,t^2 - 6\,By\,t^2 + 4\,Cy\,t^2 - Ay\,t^3 + 3\,By\,t^3 - 4\,Cy\,t^3 + 2\,Dy\,t^3$

```
In[∘]:= Zy = 2 r t;
```

Koeffizientenvergleich

```
In[∘]:= loy = Solve[{Ay == 0, -3 Ay + 3 By == 2 r,
              löse
           3 Ay - 6 By + 4 Cy == 0, -Ay + 3 By - 4 Cy + 2 Dy == 0}, {Ay, By, Cy, Dy}]
```

Out[∘]= $\left\{\left\{Ay \to 0,\ By \to \frac{2\,r}{3},\ Cy \to r,\ Dy \to r\right\}\right\}$

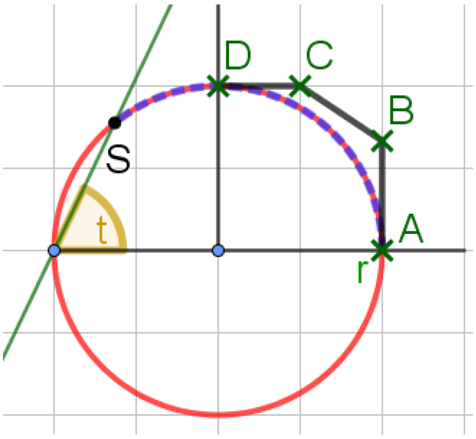
```
In[∘]:= Koordinaten = Join[lox⟦1⟧, loy⟦1⟧]
                      verknüpfe
```

Out[∘]= $\left\{Ax \to r,\ Bx \to r,\ Cx \to \frac{r}{2},\ Dx \to 0,\ Ay \to 0,\ By \to \frac{2\,r}{3},\ Cy \to r,\ Dy \to r\right\}$

○ Steuerpunkte

In[∘]:=
```
{{Ax, Ay}, {Bx, By}, {Cx, Cy}, {Dx, Dy}} /. Koordinaten
```

Out[∘]= $\left\{\{r, 0\}, \left\{r, \frac{2\,r}{3}\right\}, \left\{\frac{r}{2}, r\right\}, \{0, r\}\right\}$



■ GeoGebra-Dateien dazu Kreis-pos-param.ggb