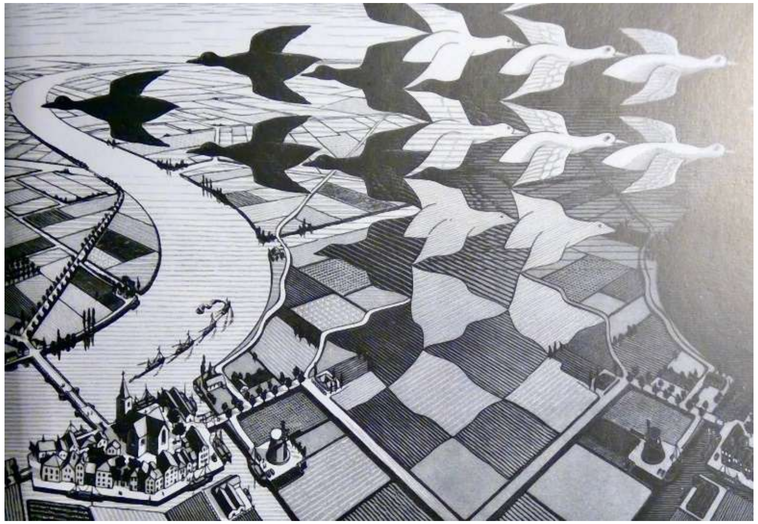
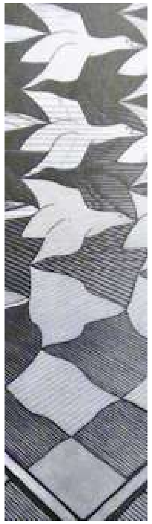
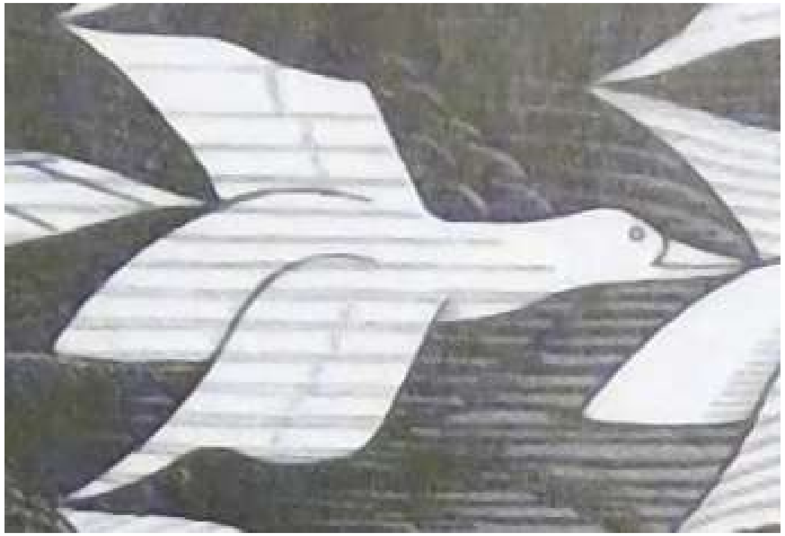
Escher-Metamorphose

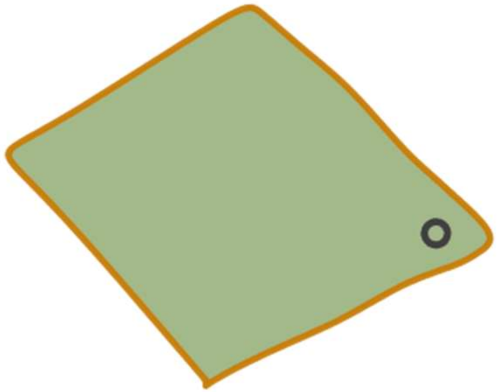
mit B-Splines-NURBS mit vom Grad 3

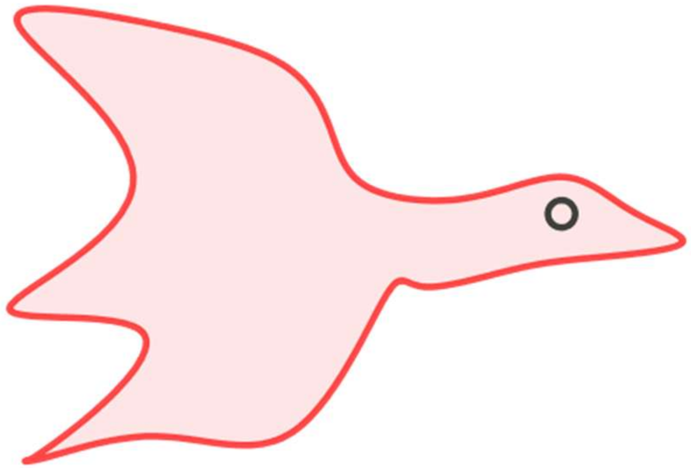






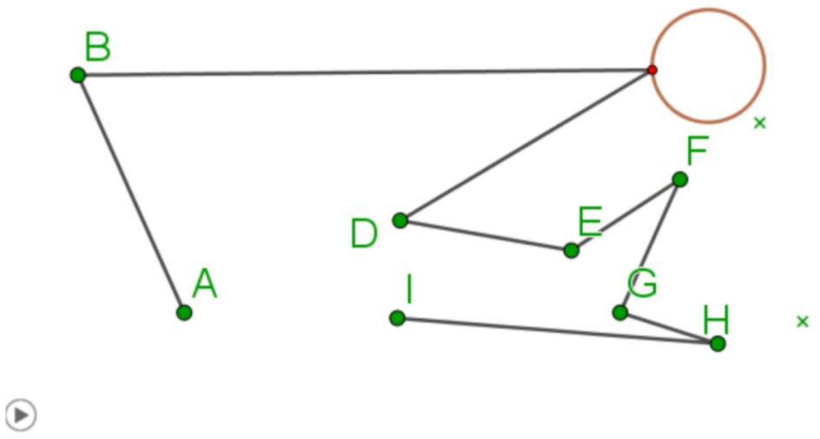
Mauritz C. Escher: Tag und Nacht
1898-1972

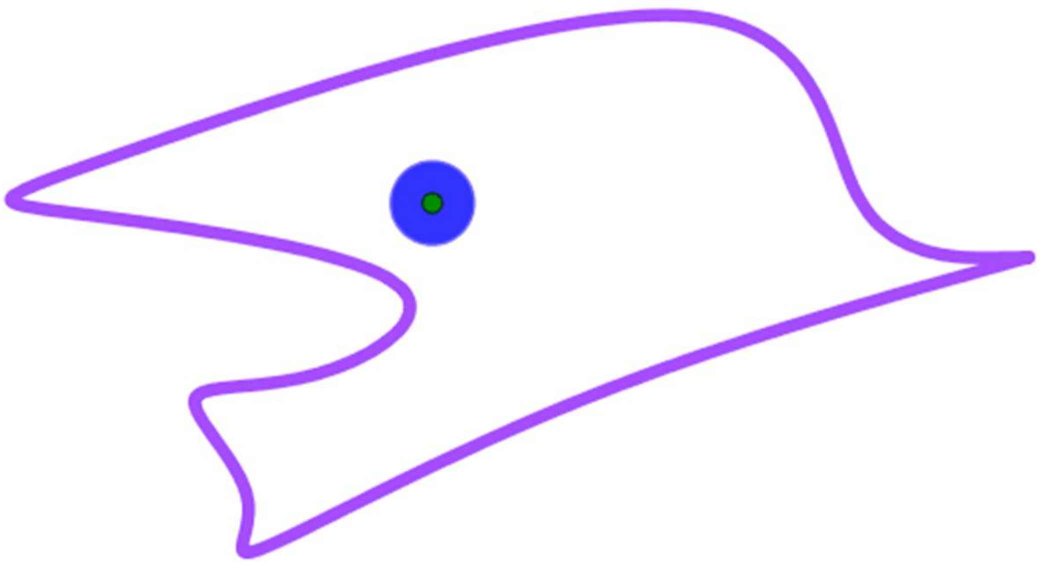


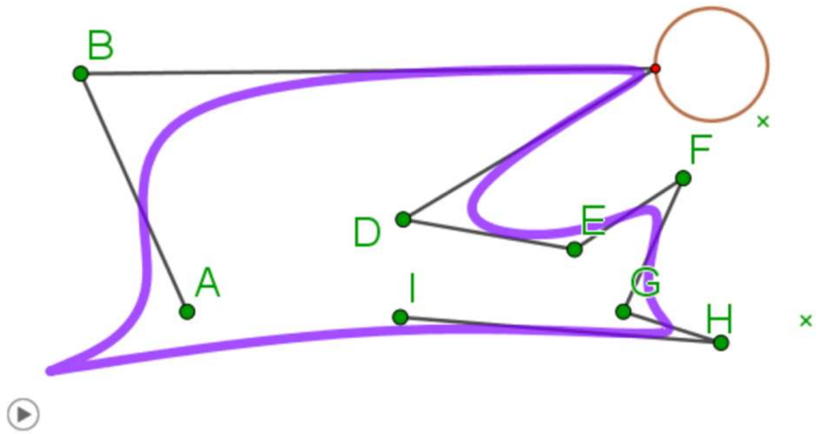


Idee aus einem biographischen Film, bei dem Tiere aus den Bildern krabbeln.

NURBS
Grundlage für Animationsfilme
11. 11.2025 MNU Bremerhaven

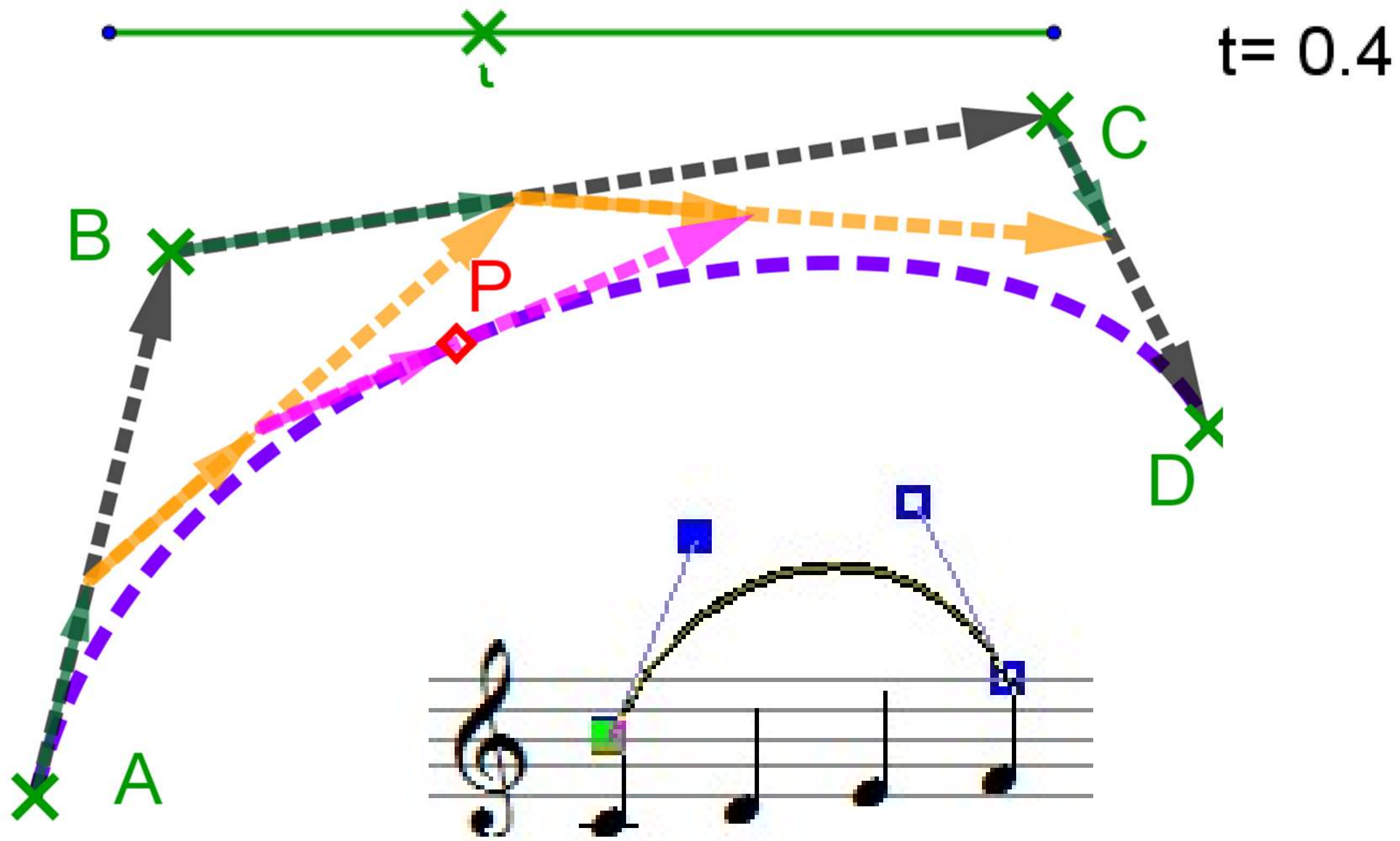






- **N** • **N**imm Steuerpunkte
- **U** • **U**nd ein Basissystem (z.B. Polynome),
- **R** • **R**ichtige Linearkombination.
- **B** • **B**ald ist „**Hein Mück**“ fertig.
- **S** • **S**o macht „Hein“ jede geometrische Bewegung brav mit, z.B. eine Spiegelung.

Bézier-Spline, eine geometrische Erzeugung



Kapitel 5.3.3 f
2. Auflage

Ein vektorieller Beweis ergibt die Bernsteinpolynome

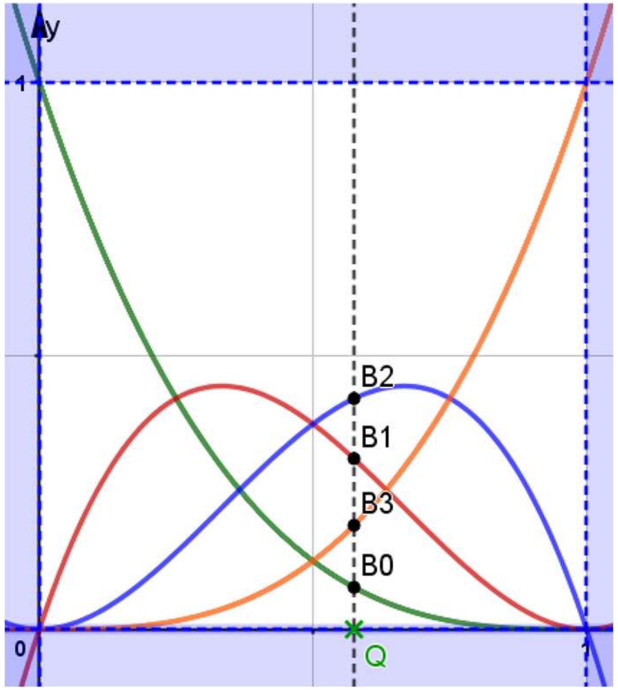
Parameterdarstellung der Bézierkurve

$$\vec{P} = (1-t)^3\vec{A} + 3(1-t)^2 t\vec{B} + 3(1-t)t^2\vec{C} + t^3\vec{D}$$

Bézier-Splines

Die **Bernsteinpolynome**

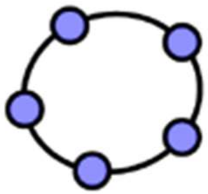
bilden eine Basis im $\Pi(3)$



$$b0(x) = (1 - x)^3$$
$$b1(x) = 3x\,(1 - x)^2$$
$$b2(x) = 3\,(1 - x)\,x^2$$
$$b3(x) = x^3$$

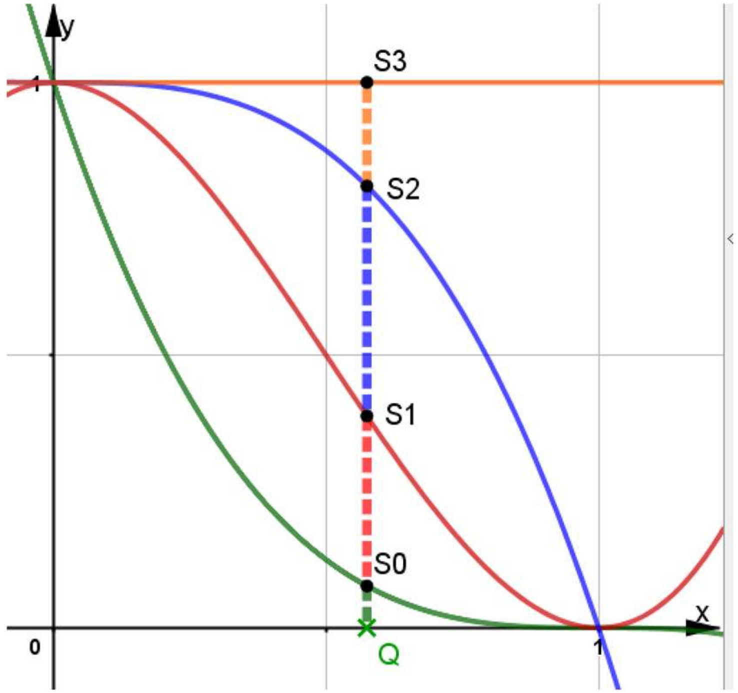
Wegen $((1-x)+x)^3 = 1$ ist die Summe der Ordinaten an jeder Stelle 1.

Polynome 3. Grades
3 Nullstellen genau
für x=0 und x=1



Interaktiv auch zu sehen,

Es sind sämtliche Möglichkeiten.
Herleitung gleich!



Dadurch ist der Bézier-Spline eine Parameterkurve

Linearkombination der **Bernsteinpolynome**

mit den Steuerpunkten als Koeffizienten

$$x(t) = A_x\, b_0(t) + B_x\, b_1(t) + C_x\, b_2(t) + D_x\, b_3(t)$$

$$y(t) = A_y\, b_0(t) + B_y\, b_1(t) + C_y\, b_2(t) + D_y\, b_3(t)$$

In GeoGebra:

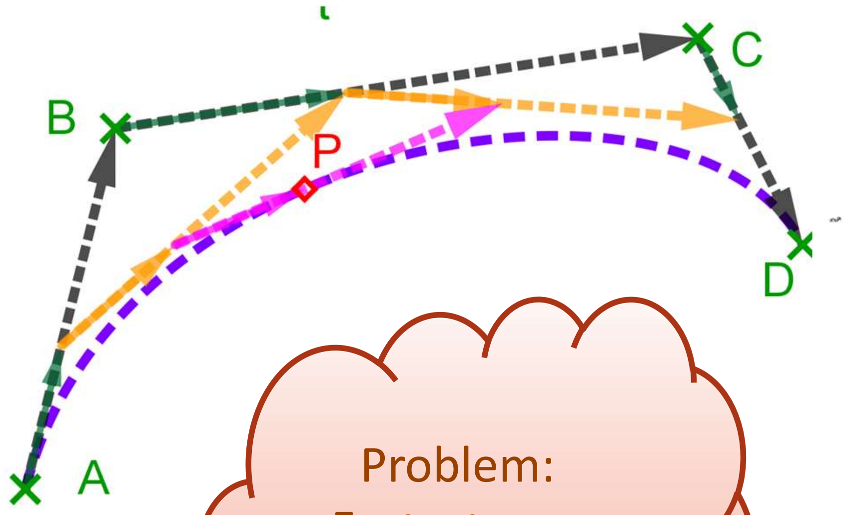
$\boxed{\text{Kurve(x(t),y(t),t,0,1)}}$

$b0(x) = (1 - x)^3$

$b1(x) = 3x\,(1 - x)^2$

$b2(x) = 3\,(1 - x)\,x^2$

$b3(x) = x^3$

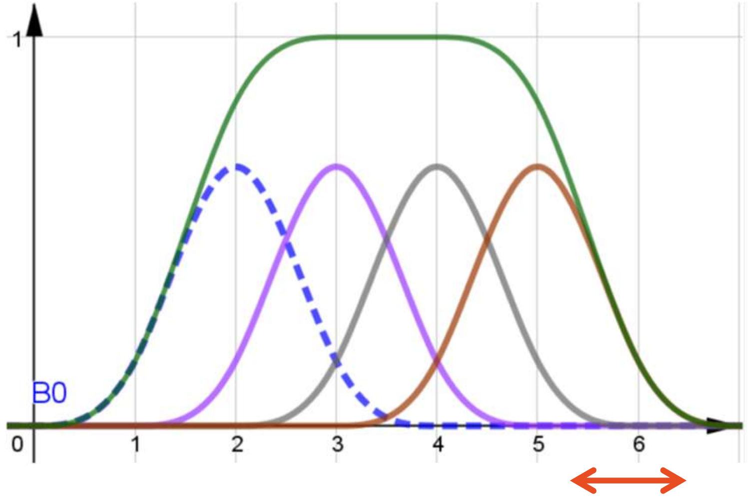


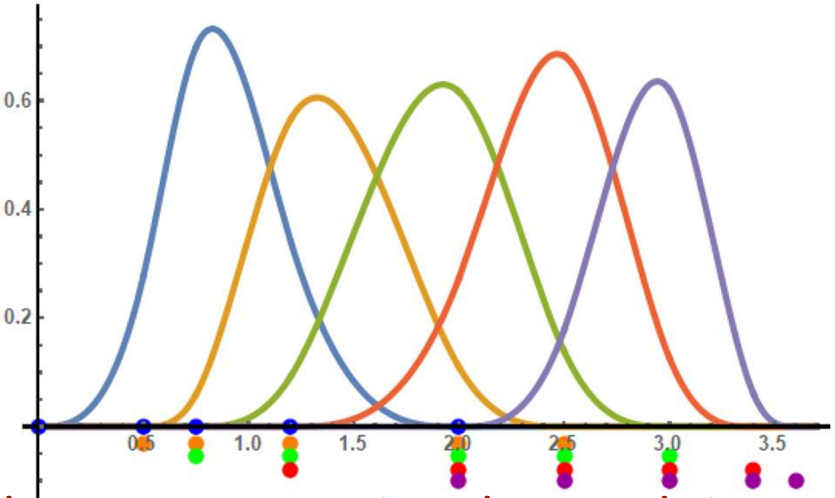
? X

Problem: Fortsetzung mit mehr Steuerpunkten

Weiterführende Spline-Konzepte

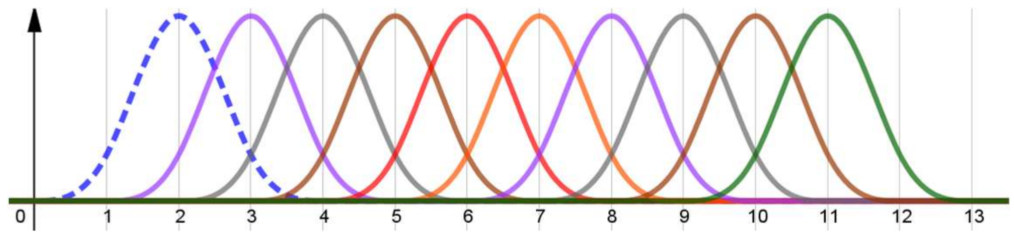
B-Splines und NURBS als ZIEL





- Basis aus Polynomen 3.Grades
- Intervallbreite 4
- Nutzbar an den Stellen, an denen 4 Basisfunktionen wirken

Basiselemente aus rationalen Funktionen 3.Grades sind n**icht notwendig***
kongruent. Sie sind nutzbar an den Stellen, an denen 4 Basiselement wirken.



Im Nutzungsbereich ist die Summe 1

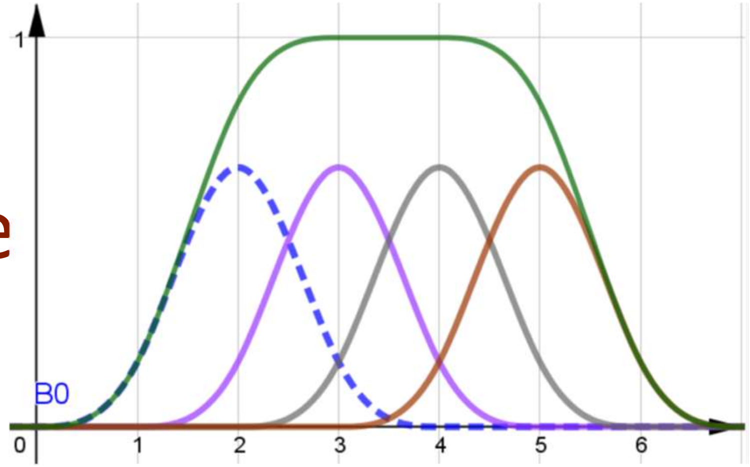
Non Uniform Rational B-Splines: NURBS

Nicht gleichförmige rationale B-Splines, es werden auch Polynom-Brüche wichtig.

B-Splines

Basis-
Polynome

Summe 1



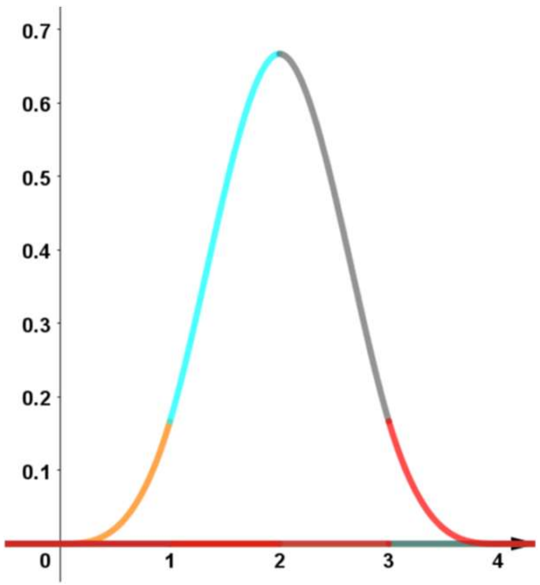
Sind das Polynome 4. Grades mit 2 doppelten Nullstellen?

Leider nicht!

Die wahre Grundfunktion
der B-Spline vom Grad 3

$B_{0,3}(t)$ ----------

besteht aus 4 Teilen

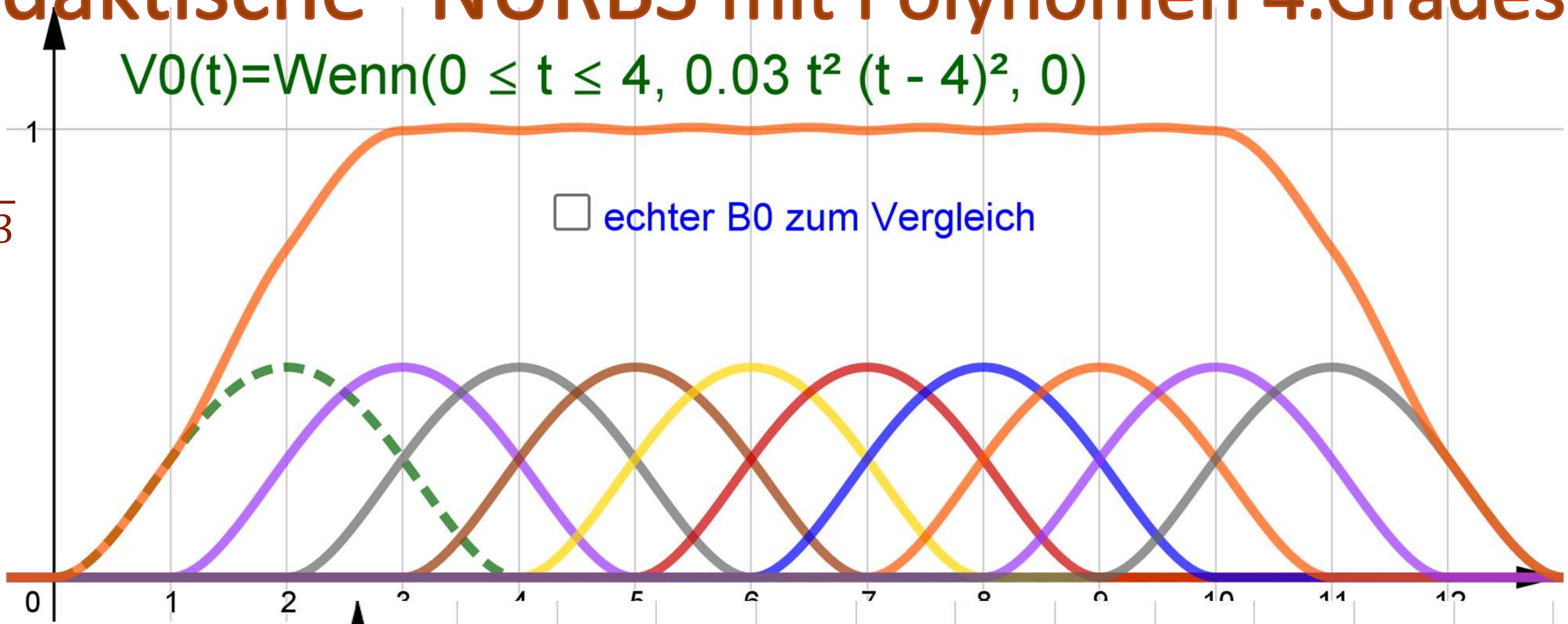


ABER: Anpassung an schulische Möglichkeiten

„Didaktische“ NURBS mit Polynomen 4.Grades

$0.03 \approx \frac{8}{273}$

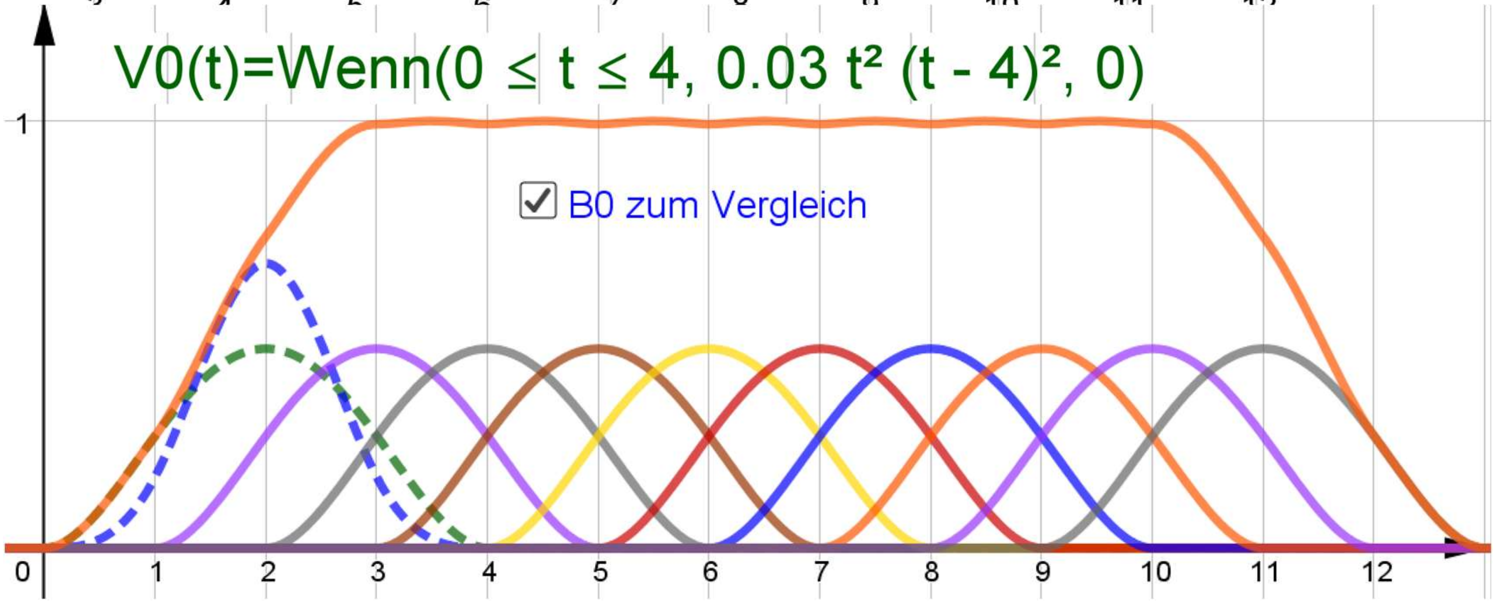
Sorgt für „etwa 1“



0

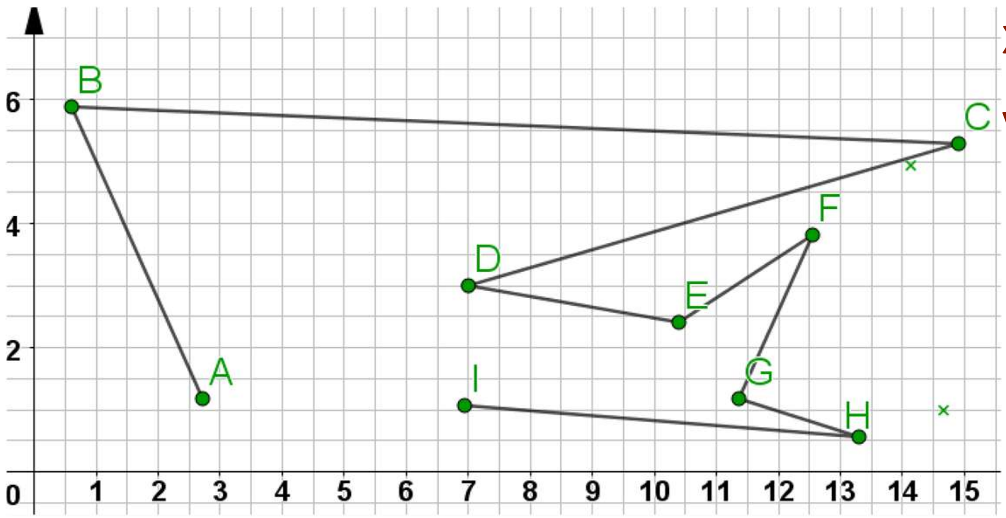
Summe 1,
ist das wahr?

LEIDER
knapp vorbei!



$B_{0,3}$ hat Sattel-Nst, V_0 hat nur doppelte Nst.

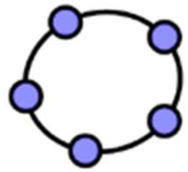
Dennoch: „Didaktische“ B-Splines



$x(t)=A_xV_0(t)+B_xV_0(t-1)+C_xV_0(t-2)+\ ....$

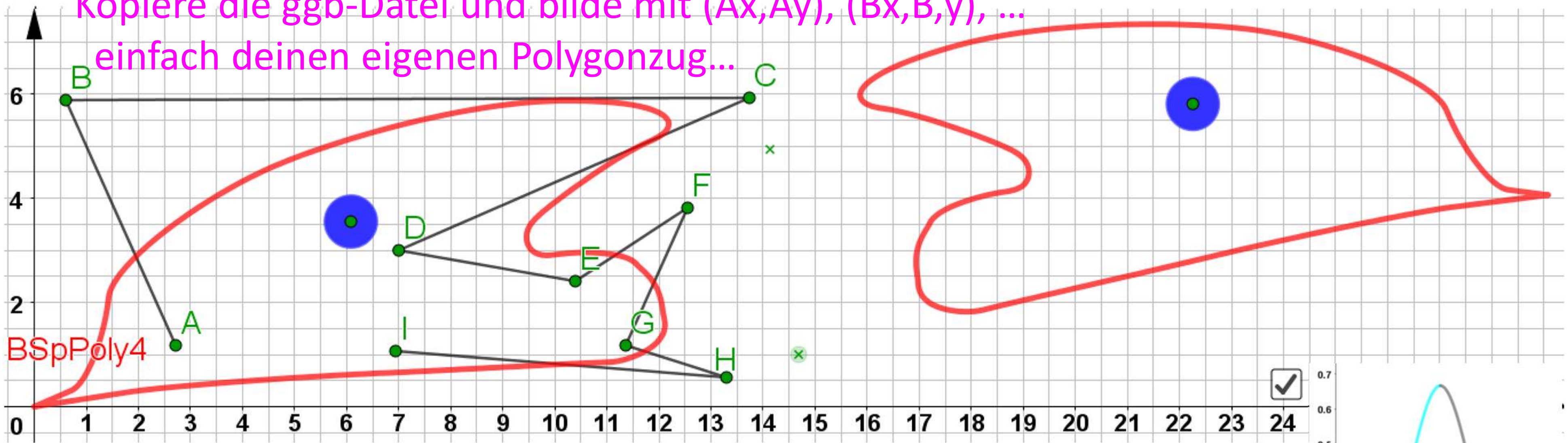
$y(t)=A_yV_0(t)+B_yV_0(t-1)+C_yV_0(t-2)+\ ....$

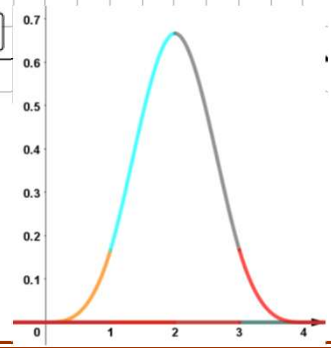
$\boxed{\text{Kurve}(x(t),y(t),t,0,13)}$



Karl +
Karline

Kopiere die ggb-Datei und bilde mit (Ax,Ay), (Bx,B,y), ...
einfach deinen eigenen Polygonzug...



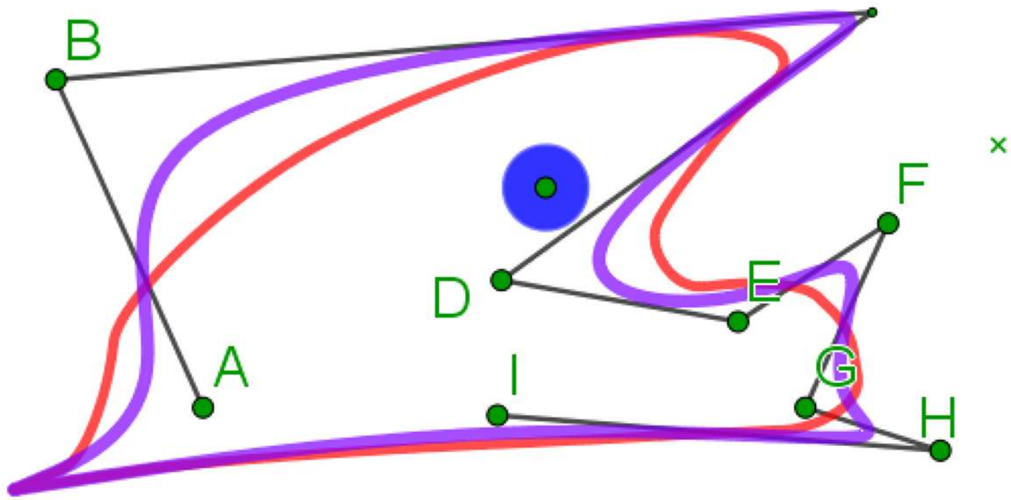


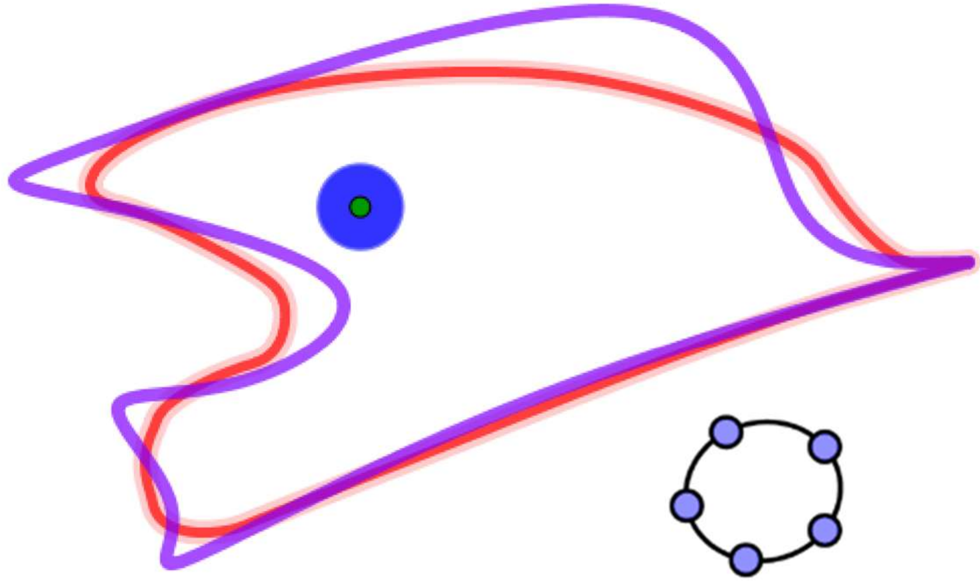
Basispolynome vom Grad 4, aber die Summe war nicht konstant 1..

B-Splines haben gestückelte Basispolynome vom Grad 3
und die Summe ist genau konstant 1.

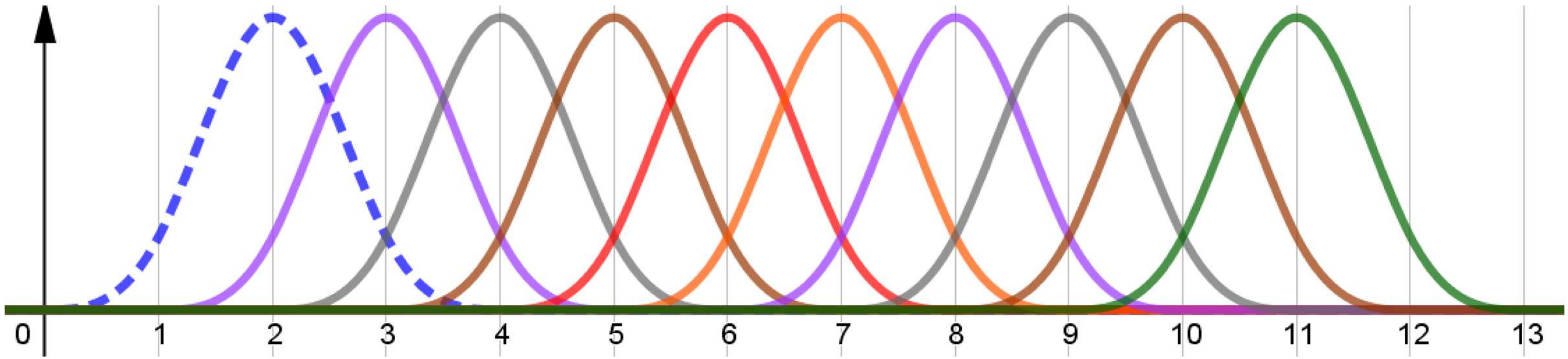
Violett: NURBS mit echten B-Splines

Karl und Karline, Poly4



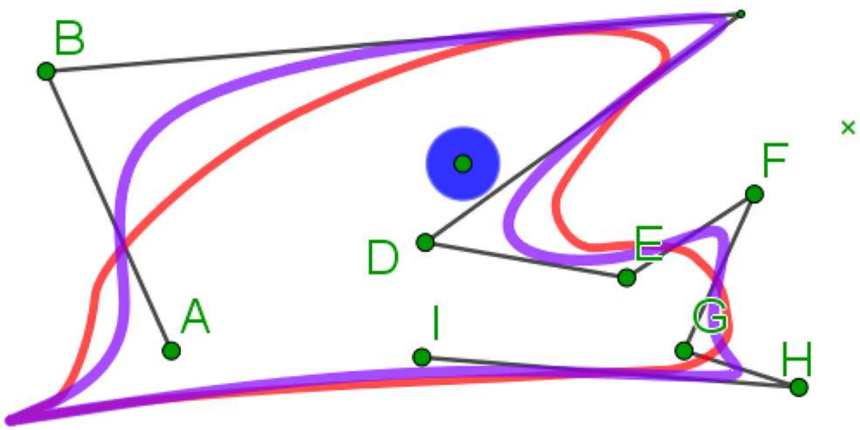


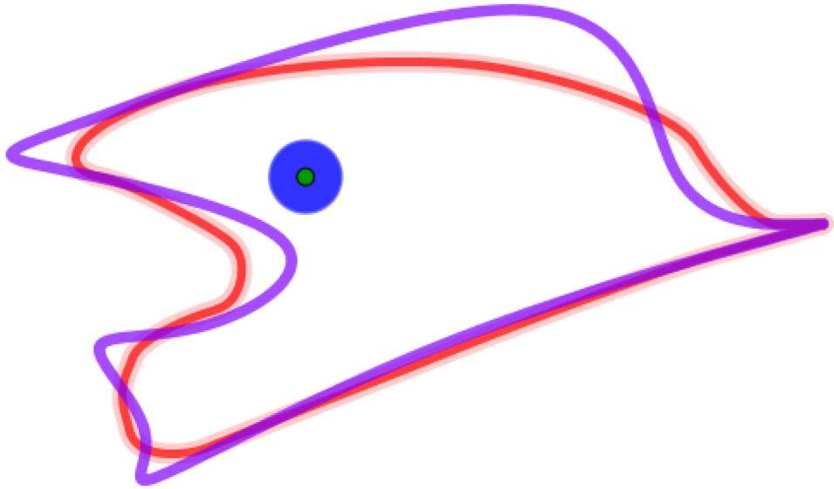
Karlo und Karla, echte B-Splines



Basis für B-Splines, sie werden gleich erklärt. Stets sind nur p+1=4 Basis-Elemente wirksam.

Vergleich der Möglichkeiten für NURBS





Der NURBS mit echten B-Splines ist „glatter“ und reagiert feiner auf die Steuerpunkte.

Die Einfachversion mit Polynomen 4. Grades ist „didaktische Erfindung“ (von mir, nicht im Buch) und nicht so edel. Aber Lernende können sie **selbst** finden.

Warum eigentlich Summe 1?

Bildet man die Steuerpunkte P_i affin ab, so ist zu wünschen, dass der Spline aus den Bildpunkten P_i‘ auch wirklich mit dem **affinen Bild** des Ur-Splines übereinstimmt. Wegen

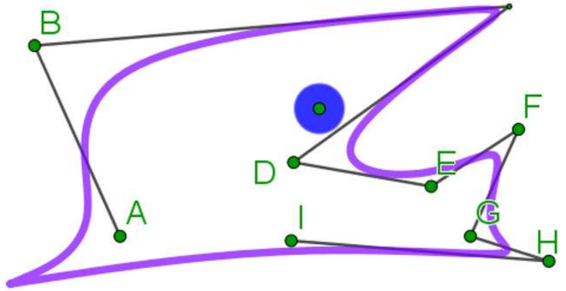
$P \to AP + \vec{b}$ muss dafür aber
$\sum_{i=0}^{3} B_i \vec{b} = \vec{b}$ gelten.
Also muss $\sum_{i=0}^{3} B_i = 1$ sein.

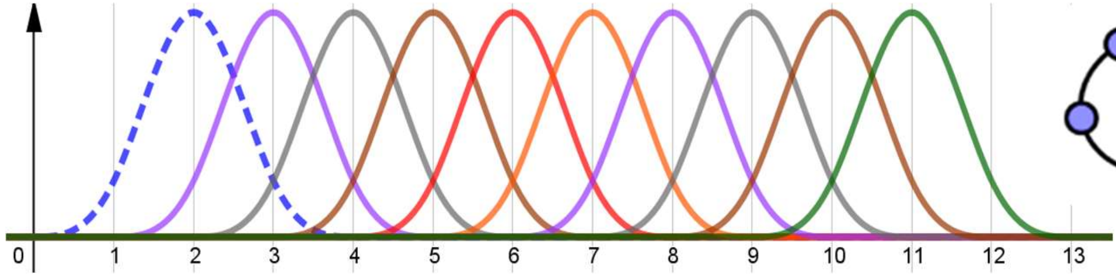
Wie sind die echten B-Splines definiert?

ggb nächste Folie

NURBS mit B-Splines vom Grad 3 sind hier mit „Knoten“ im Abstand 1 gezeigt

In jedem Intervall der Breite 1 bilden 4 Hügel eine Basis.



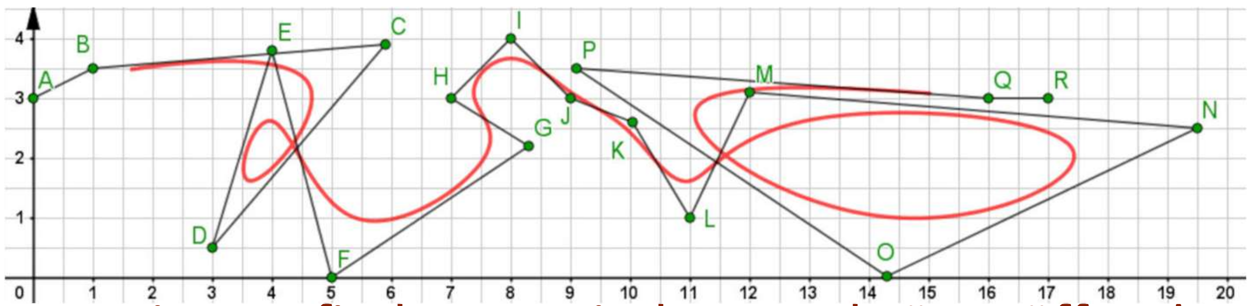


„Karl“ ist die Parameterkurve

$$x(t)=A_xB_{0,3}(t)+ B_xB_{1,3}(t)+ C_xB_{2,3}(t)+ D_xB_{3,3}(t)+ E_xB_{4,3}(t)+ F_xB_{5,3}(t)+ G_xB_{6,3}(t)+ H_xB_{7,3}(t)+ I_xB_{8,3}(t)$$

$$y(t)=A_yB_{0,3}(t)+ B_yB_{1,3}(t)+ C_yB_{2,3}(t)+ D_yB_{3,3}(t)+ E_yB_{4,3}(t)+ F_yB_{5,3}(t)+ G_yB_{6,3}(t)+ H_yB_{7,3}(t)+ I_yB_{8,3}(t)$$

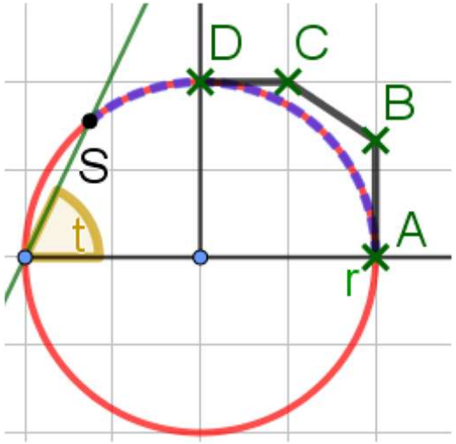
$B_{i\,p}(t)$ ist entweder ein echter B-Spline vom Grad p oder ein „didaktischer“ Polynom-Hügel 4. Grades oder ein Bernsteinpolynom von Grad p.



2. Aufl. S. 416

1. Aufl.S. 379

Kreativen Erfindungen sind Tor und Tür geöffnet!

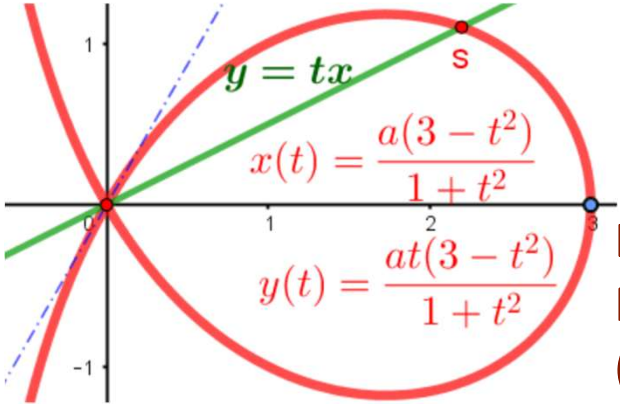


Exakte Geometrie mit NURBS ist möglich.

In der 3. Auflage sind nun Metamorphosen von einer Kurve zu einer anderen.

S.420f (1.Aufl. S. 380f)

Hierzu folgt jetzt ein Beispiel:



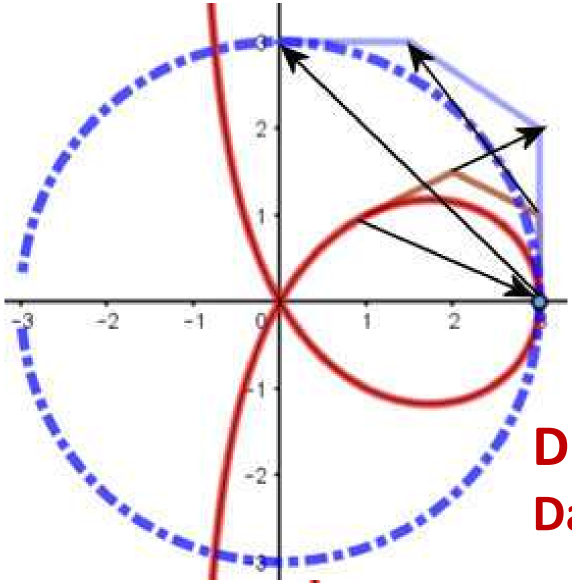
Die Trisektrix hat die implizite Gleichung $(a+x)y^2 = (3a-x)x^2$

Durch den Schnitt mit einer Geraden durch den singulären Punkt findet man ggf. eine rationale **Parametrisierung** (s. links), für die Trisektrix ist sie 3. Grades.

Um eine exakte Kurve C1 stetig und differenzierbar in eine exakte Kurve C2 zu verwandeln, kann man (oft) einen NURBS konstruieren, der dieses leistet.

Dieses und das weitere Vorgehen ist für die Trisektrix und den Kreis ganz ausführlich in dem Aufsatz vorgeführt, den Sie unmittelbar nach der Präsentation verlinkt finden.

Die Herleitung für die Lemniskate von Gerono bekommen Sie hier von mir als Weihnachtsgeschenk, Versprochen!



Metamorphose von der Trisektrix zum Kreis,

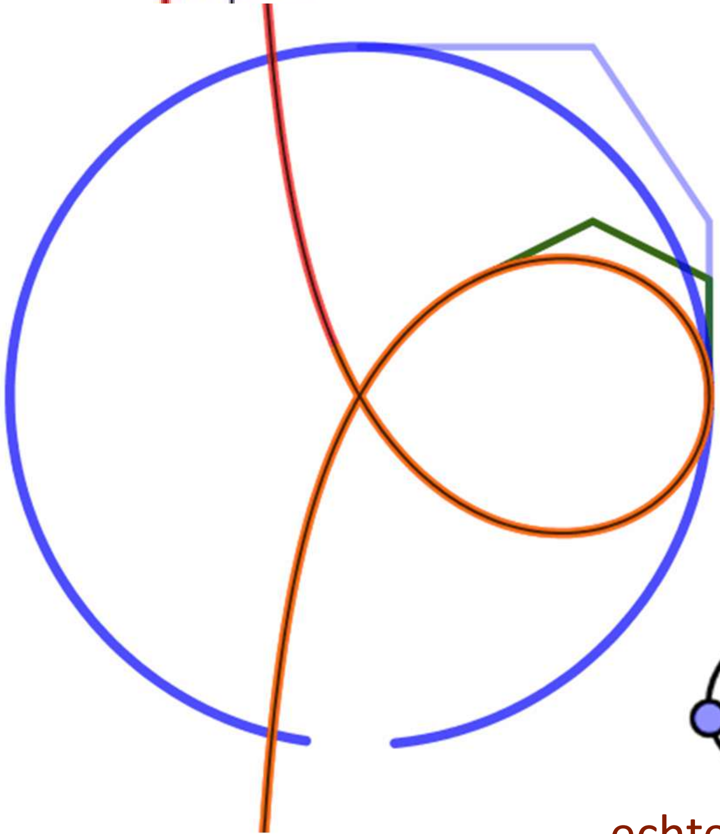
der hier negativ durchlaufen wird, vom Nordpol zum Ostpol

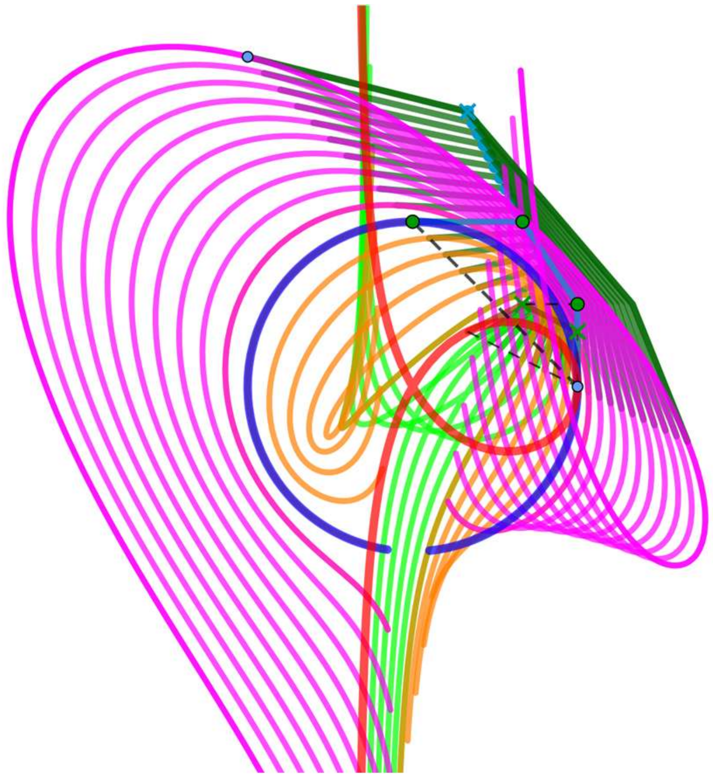
$$x(t) = \frac{2rt}{1+t^2},$$

$$y(t) = \frac{r(1-t^2)}{1+t^2}$$

Die Trisektix dagegen startet am Ostpol.

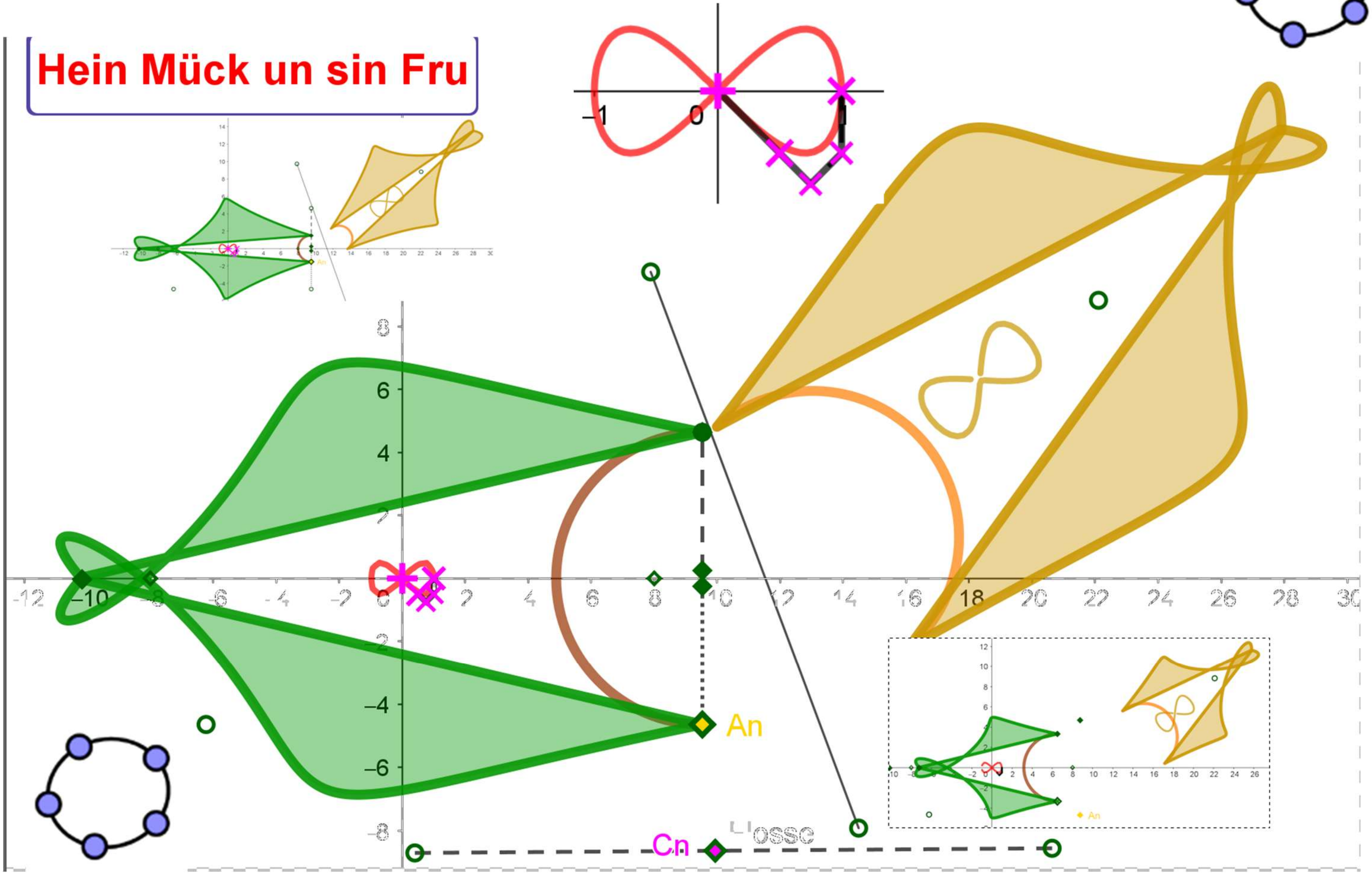
Das zwingt sie zu der deutlichen Umwendung.





echte-Trisektrix-Bz.ggb

Lemniskate von Gerona
mit ihrem Gerüst

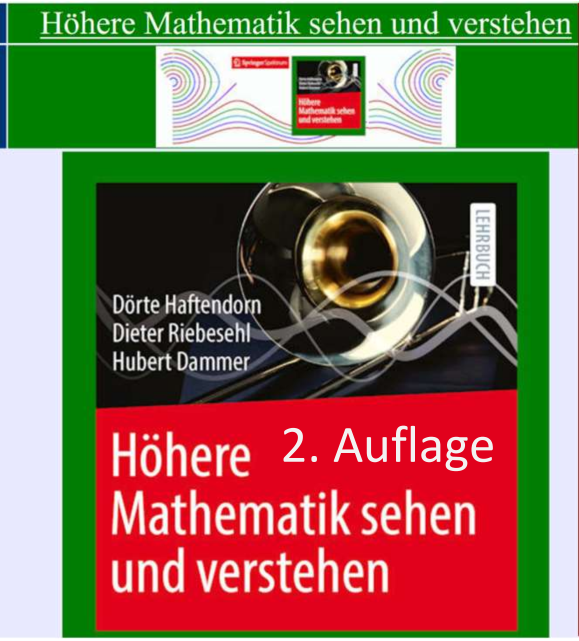


Hein Mück un sin Fru

habe ich für die MNU Bremerhaven erfunden

Hier möchte ich für die Gerono'sche Lemniskate die ganze Herleitung durchführen.
Damit es nun aber nicht noch länger dauert, bis hier die Inhalte vom Vortrag stehen, nehme ich mir das für die nächsten grauen, kalten Novembertage vor.
Bitte haben Sie etwas Geduld!
Es wird ein Weihnachtsgeschenk.

Lesen Sie ausführlicher in den Büchern



Numerik,
9.2.4, S 248

Splines+NURBS
in 5.3 bis 5.4

Reichhaltiger
Kurvenvorrat

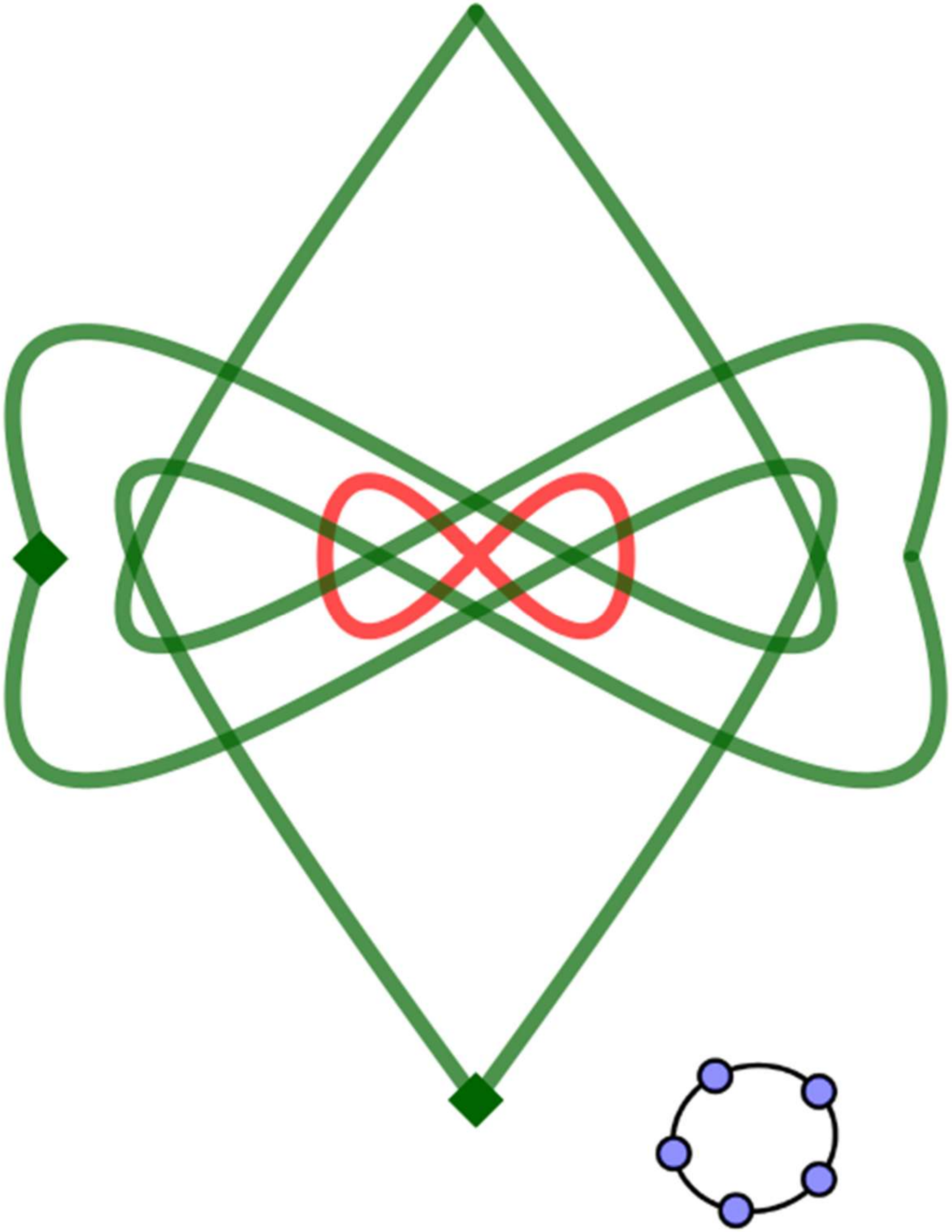
Alle diese Bücher bei Springer nature, Heidelberg

Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien
finden Sie im Bereich Vorträge
auf der Site, die hier blaues Layout hat.

11. 11. 20 um 11 Uhr

MNU Bremerhaven

NURBS
Animationsfilme verstehen



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit