Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

Allgemeine Rechnungen

In[∘]:= `f[x_] := (x - a)^α g[x]`

a ist α-fache Nullstelle von f, wenn g[a]≠0 ist. (α ≥1)

In[∘]:= `f'[x]`

Out[∘]= $(-a+x)^{-1+\alpha}\,\alpha\, g[x] + (-a+x)^{\alpha}\, g'[x]$

In[∘]:= `Simplify[(-a + x)^(-1+α) α g[x] + (-a + x)^α g'[x]]`
vereinfache

In[∘]:= `ff[x_] := (-a + x)^(α-1) (α g[x] + (-a + x) g'[x])`

In[∘]:= `(α g[x] + (-a + x) g'[x]) /. x → a`

Out[∘]= $\alpha\, g[a]$

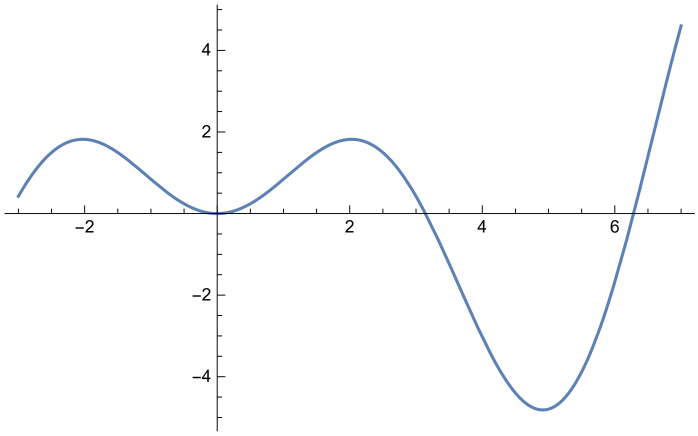
Satz: Ist a eine α-fache Nullstelle von f, dann ist a eine (α-1)-fache Nullstelle der Ableitung f'.

Beispiele

Bei Polynomen ist alles klar, nun andere: 1. Sinus

In[3]:= `fs[x_] := x Sin[x]`
Sinus

In[∘]:=
```
Plot[fs[x], {x, -3, 7}]
```
stelle Funktion graphisch dar

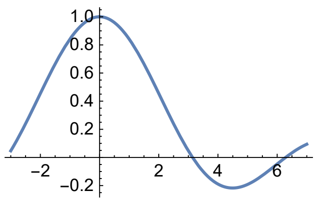
Out[∘]=


fs hat bei x=0 eine doppelte Nullstelle, denn

In[1]:= $fs[x] == x^2 \frac{Sin[x]}{x}$

Out[1]= $fs[x] == x\,Sin[x]$

In[∘]:= $Plot\left[\frac{Sin[x]}{x}, \{x, -3, 7\}\right]$
stelle Funktion graphisch dar

Out[∘]=


Begründung über Zeichnung, lineare Näherung (Tangente) oder Taylor oder L'Hospital

In[4]:=
```
fs'[x]
```

Out[4]= $x\,Cos[x] + Sin[x]$

In[5]:= $fss[x\_] := x\left(Cos[x] + \frac{Sin[x]}{x}\right)$
Kosinus

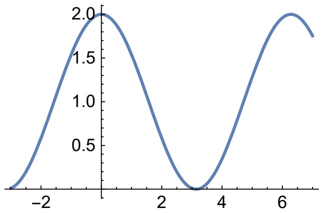
In[7]:= $Limit\left[Cos[x] + \frac{Sin[x]}{x}, x \to 0\right]$
Gren⋯ Kosinus

Out[7]= 2

Zweites Beispiel: Cos(x)+1

In[∘]:=
```
fc[x_] := Cos[x] + 1
```
Kosinus

In[ ]:=
```
Plot[fc[x], {x, -3, 7}]
```
stelle Funktion graphisch dar

Out[ ]=


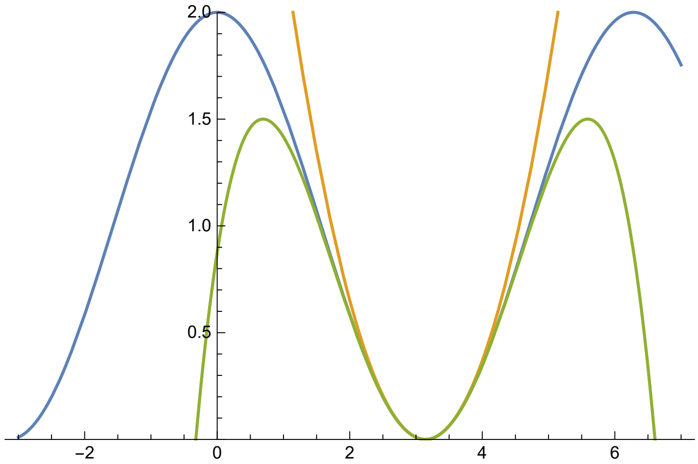
Erkunden mit der Taylorreihe

In[ ]:=
```
Series[fc[x], {x, π, 4}]
```
Reihe

Out[ ]= $\frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4 + O[x-\pi]^5$

In[ ]:= $\text{Plot}\left[\left\{\text{fc}[x], \frac{1}{2}(\pi-x)^2, \frac{1}{2}(x-\pi)^2 - \frac{1}{24}(x-\pi)^4\right\}, \{x, -3, 7\}, \text{PlotRange} \to \{0, 2\}\right]$

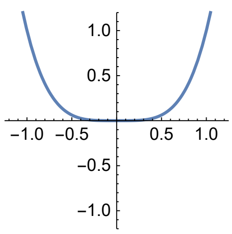
stelle Funktion graphisch dar | Koordinatenbereich der Gra

Out[ ]=


Tatsächlich kann man einen quadrierten Linearfaktor ausklammern.

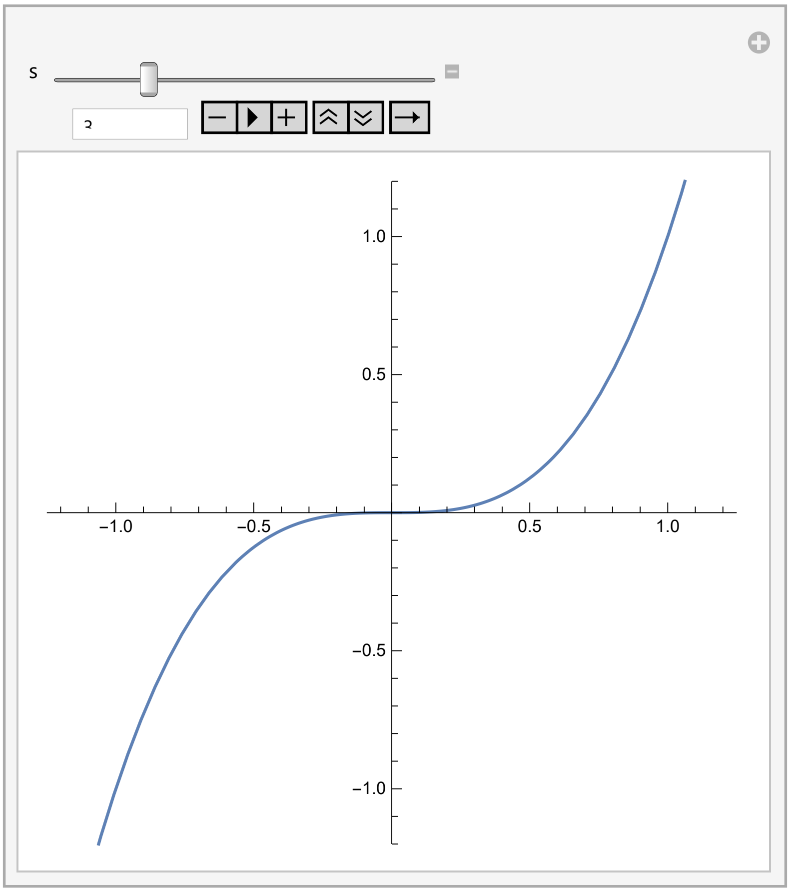
Potenzfunktionen

In[11]:=
```
Plot[x^s /. s → 4, {x, -1.2, 1.2}, PlotRange -> {-1.2, 1.2}, AspectRatio → Automatic]
```
stelle Funktion graphisch dar | Koordinatenbereich der Graphik | Seitenverhältnis | automatisch

Out[11]=


In[15]:=
```
Manipulate[Plot[x^s, {x, -1.2, 1.2},
  PlotRange -> {-1.2, 1.2}, AspectRatio → Automatic], {{s, 2}, 1, 10, 1}]
```
manipuliere | stelle Funktion graphisch dar | Koordinatenbereich der Graphik | Seitenverhältnis | automatisch

Out[15]=

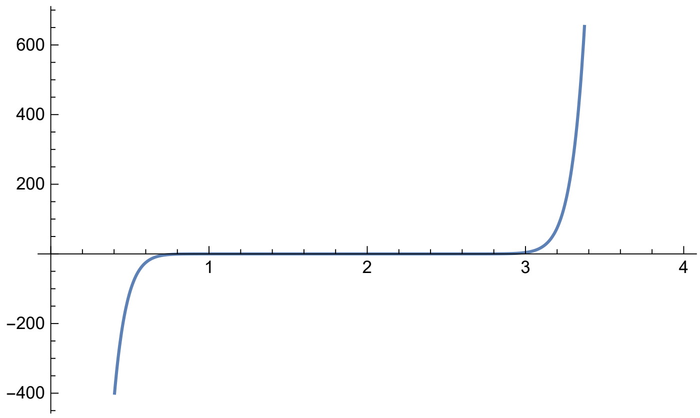


Platt oder nicht platt

In[16]:=
```
fp[x_] := (x - 1)^2 (x - 2)^15
```

In[18]:=
```
Plot[fp[x], {x, 0, 4}]
```
stelle Funktion graphisch dar

Out[18]=



In[20]:= `fp'[x] // Factor`
faktorisiere

Out[20]= $(-2+x)^{14}\,(-1+x)\,(-19+17\,x)$

In[22]:= $\text{fp}\left[\frac{19.}{17}\right]$

Out[22]= -0.00211737

In[25]:= $\frac{\text{fp}''[x]}{(x-2)^{13}}$ `// Simplify`
vereinfache

Out[25]= $338-608\,x+272\,x^2$

In[27]:= $\text{Solve}\left[338-608\,x+272\,x^2,\ x\right]$
löse

Solve: $338-608\,x+272\,x^2$ is not a quantified system of equations and inequalities.

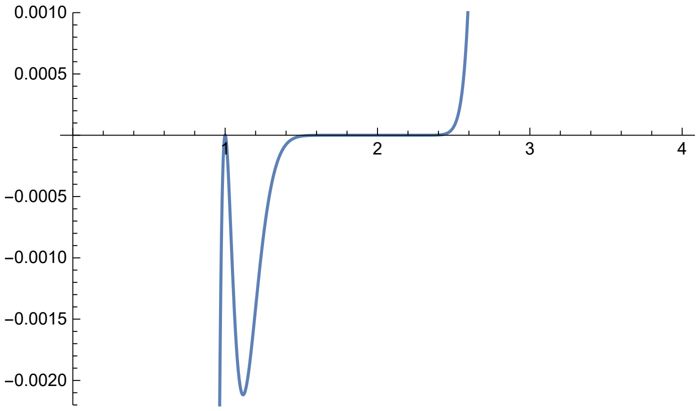
In[29]:= $\text{Solve}\left[338-608\,x+272\,x^2 == 0,\ x\right]$ `// N`
löse numerischer Wert

Out[29]= {{x → 1.0371}, {x → 1.19819}}

In[32]:= `fp[x] /. {{x → 1.0371}, {x → 1.19819}}`

Out[32]= {-0.000780655, -0.00142961}

In[164]:= `Plot[fp[x], {x, 0, 4}, PlotRange → {-0.0022, 0.001}]`
stelle Funktion graphisch dar Koordinatenbereich der Graphik

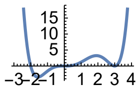
Out[164]=


Startbeispiel

In[96]:= $\text{f1}[x\_] := t\,(x+2)\,(x-a)^3\,(x-3)^2$

In[34]:= `t = 0.1; a = 0;`

In[35]:= `Plot[f1[x], {x, -3, 4}]`
stelle Funktion graphisch dar

Out[35]=


Näherungen an den Nullstellen

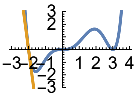
erste Nullestelle

In[73]:= `f11[x_] := t (x + 2) (-2 - a)^3 (-2 - 3)^2; f11[x]`

Out[73]= $-200\, t\, (2 + x)$

In[77]:= `a = 0; t = 0.05;`

In[78]:= `Plot[{f1[x], f11[x]}, {x, -3, 4}, PlotRange → {-3, 3}]`
stelle Funktion graphisch dar   Koordinatenbereich der Grap

Out[78]=


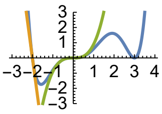
zweite Nullstelle a=0

In[79]:= `f12[x_] := t (a + 2) (x - a)^3 (a - 3)^2; f12[x]`

Out[79]= $0.9\, x^3$

In[131]:= `a = 0; t =` $\frac{1}{20}$`;`

In[80]:= `Plot[{f1[x], f11[x], f12[x]}, {x, -3, 4}, PlotRange → {-3, 3}]`
stelle Funktion graphisch dar   Koordinatenbereich der Grap

Out[80]=


dritte Nullstelle , mit a=0

In[132]:= `f13[x_] := t (3 + 2) (3 - a)^3 (x - 3)^2; f13[x]`

Out[132]= $\frac{27}{4} (-3 + x)^2$

In[88]:= `5 * 27`

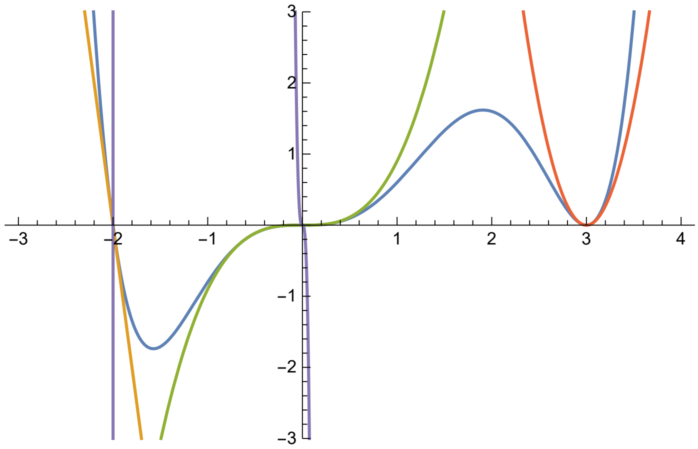
Out[88]= 135

In[133]:= `% * t`

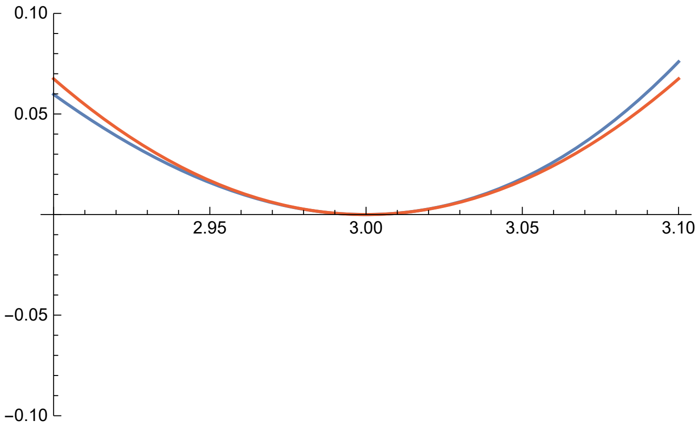
Out[133]= $\frac{27}{80} (-3 + x)^2$

In[134]:= `a = 0; t =` $\frac{1}{20}$`;`

In[87]:=
```
Plot[{f1[x], f11[x], f12[x], f13[x], f11[x] * f12[x] / t^2},
  {x, -3, 4}, PlotRange → {-3, 3}]
```
stelle Funktion graphisch dar
Koordinatenbereich der Graphik

Out[87]=


In[84]:=
```
Plot[{f1[x], f11[x], f12[x], f13[x]}, {x, 2.9, 3.1}, PlotRange → {-0.1, .1}]
```
stelle Funktion graphisch dar
Koordinatenbereich der Graphik

Out[84]=


Hier verstehe ich nicht, warum die Nährungsparabel die Ausgangskurve durchdringt.
Es müsste doch y=6.75 $(x-3)^2$ eine einfache Stauchung der blauen Ausgangskurve sein!?!?!!

Von Dieter: Die Taylorentwicklung um x=3 herum zeigt, dass es einen Anteil mit (x-3)3 gibt. Dieser ist nahe an x=3 dafür verantwortlich, dass hier eine “Durchdringung” stattfindet.
6.75(x-3)2 ist das am besten approximierende Polynom vom Grad 2, aber die nächste Approximation ist (hier wie normalerweise) vom Grad 3. Nur wenn zufällig in der Taylorentwicklung der Term vom Grad 3 fehlt, nicht aber der vom Grad 4 (usw. weitere noch seltenere Fälle), gibt es keine Durchdringung.

In[135]:=
```
tay1 = Series[f1[x], {x, 3, 19}]
```
Reihe

Out[135]= $\frac{27}{4}(x-3)^2+\frac{81}{10}(x-3)^3+\frac{18}{5}(x-3)^4+\frac{7}{10}(x-3)^5+\frac{1}{20}(x-3)^6+O[x-3]^{20}$

In[141]:= $\text{tay1}\Big/\left(\frac{27}{4}(x-3)\,{}^\wedge 2\right)$

Out[141]= $1+\frac{6(x-3)}{5}+\frac{8}{15}(x-3)^2+\frac{14}{135}(x-3)^3+\frac{1}{135}(x-3)^4+O[x-3]^{18}$

In[142]:=
```
tay13 = Normal[%]
```
normal

Out[142]= $1+\frac{6}{5}(-3+x)+\frac{8}{15}(-3+x)^2+\frac{14}{135}(-3+x)^3+\frac{1}{135}(-3+x)^4$

andere Berechnung vom Rest

In[147]:=
```
g1[x_] := (x + 2) x^3;
{g1[3], g1[3] t}
```

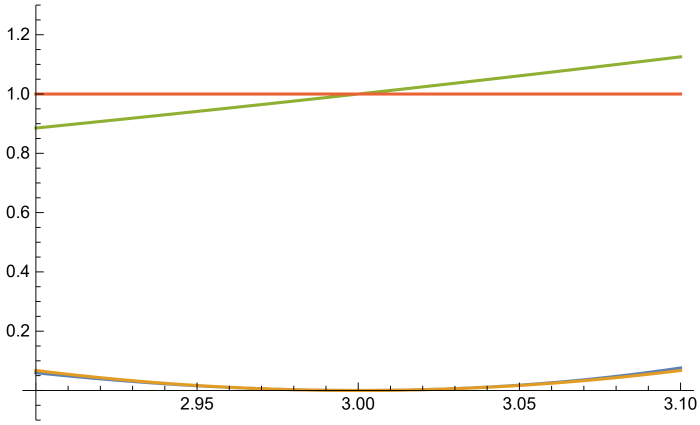
Out[148]= $\left\{135, \frac{27}{4}\right\}$

In[140]:=
```
g13 = Normal[Series[g1[x] / 135, {x, 3, 6}]]
```
normal Reihe

Out[140]= $1+\frac{6}{5}(-3+x)+\frac{8}{15}(-3+x)^2+\frac{14}{135}(-3+x)^3+\frac{1}{135}(-3+x)^4$

da kommt dasselbe heraus

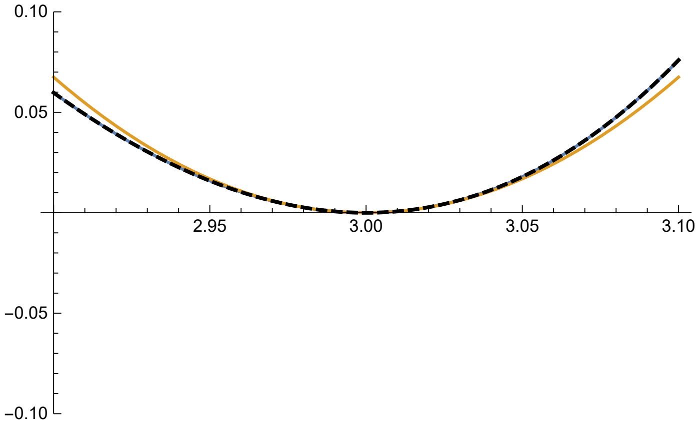
In[145]:=
```
Plot[{f1[x], f13[x], g13, 1}, {x, 2.9, 3.1}, PlotRange → {-0.1, 1.3}]
```
stelle Funktion graphisch dar Koordinatenbereich der Graphik

Out[145]=


Aha, der Faktor 6.75 von $(x-3)^2$, der bei x=3 genau f1[3] erzeugt, ist links daneben etwas kleiner und rechts daneben etwas größer. Mein Restpoynom g(x)=tay13 geht zwar durch (3,1), aber steigend. Daher hat Dieter recht und das Phänomen ist geklärt.
Meine Redeweise müsste sein “die anderen Linearfaktoren bilden in der Nähe von 3 fast nur einen Streckfaktor”.

In[153]:=
```
Plot[{f1[x], f13[x], f13[x] * g13}, {x, 2.9, 3.1},
 PlotRange → {-0.1, 0.1}, PlotStyle → {{}, {}, {Black, Thick, Dashed}}]
```
stelle Funktion graphisch dar; Koordinatenbereich der Graphik; Darstellungsstil; schwarz; dick; gestrichelt

Out[153]=



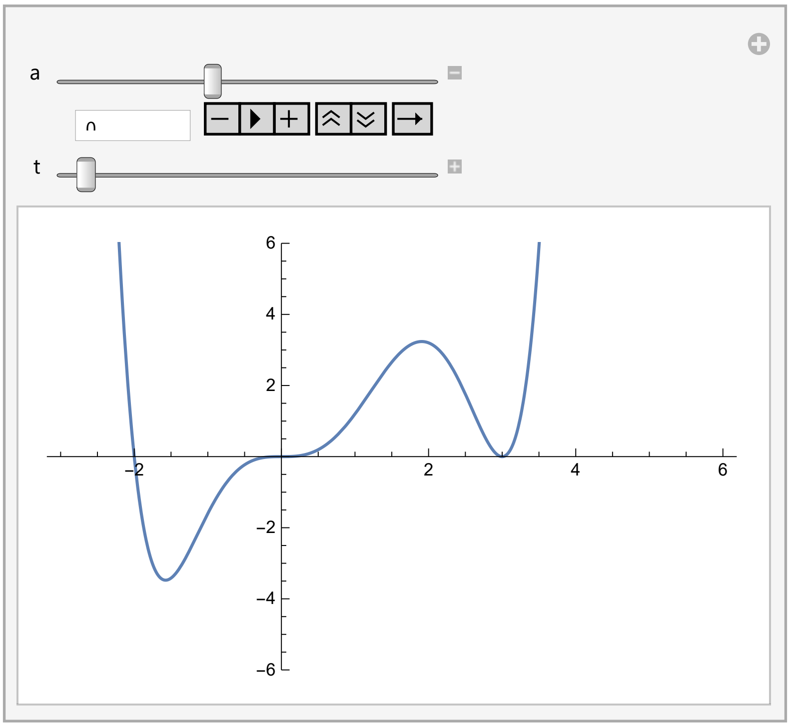
Variation von a

In[41]:=
```
a =.; a
```

Out[41]= a

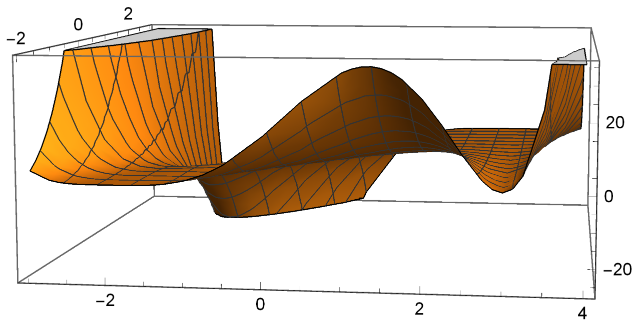
In[51]:=
```
Manipulate[Plot[t (x + 2) * (x - a) ^3 * (x - 3) ^2, {x, -3, 6}, PlotRange → {-6, 6}],
 {{a, 0}, -2, 3}, {{t, 0.1}, 0, 3, 0.01}]
```
manipuliere; stelle Funktion graphisch dar; Koordinatenbereich der Graph

Out[51]=



3D-Version

In[49]:= `Plot3D[0.1 (x + 2) * (x - y) ^3 * (x - 3) ^2, {x, -3, 4}, {y, -2, 3}]`
stelle Funktion graphisch in 3D dar

Out[49]=


Trigonometrische Funktionen

Cosinus

In[90]:= $fc[x\_] := (\text{Cos}[x] + 1)^2$

In[93]:= `tay = Series[fc[x], {x, Pi, 8}]`
Reihe Kreiszahl

Out[93]= $\frac{1}{4}(x-\pi)^4 - \frac{1}{24}(x-\pi)^6 + \frac{1}{320}(x-\pi)^8 + O[x-\pi]^9$

In[95]:= $\text{tay} / (x - \text{Pi})^4 * 4$ `// Simplify`
vereinfache

Out[95]= $1 - \frac{1}{6}(x-\pi)^2 + \frac{1}{80}(x-\pi)^4 + O[x-\pi]^5$

In[155]:= `tayc = Normal[tay]`
normal

Out[155]= $\frac{1}{4}(-\pi+x)^4 - \frac{1}{24}(-\pi+x)^6 + \frac{1}{320}(-\pi+x)^8$

In[ ]:= $\text{fak} = \text{tayc} \Big/ \left(\frac{1}{4}(-\pi+x)^4\right)$ `// Simplify`
vereinfache

Out[ ]= $\frac{1}{240}\left(240 - 40(\pi-x)^2 + 3(\pi-x)^4\right)$

In[162]:= Plot$\left[\left\{fc[x], \frac{1}{4}(-\pi+x)^4, tayc, fak, 1\right\}, \{x, 0, 2\,Pi\}\right]$
stelle Funktion graphisch dar · Kreisz

Out[162]=