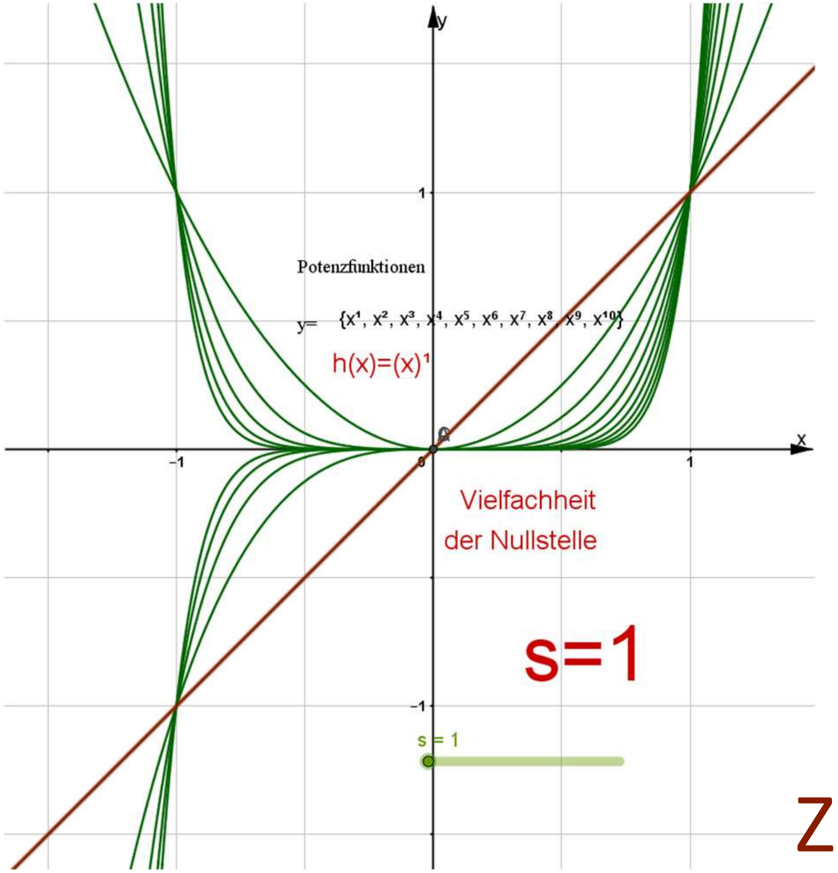
Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

19.11.2018 MNU Bremerhaven



Erst Graphen verstehen.

- Gesamtverlauf begreifen
- Felderabstreichen
- Vielfachheit beachten
- Qualitativen Graphen erzeugen

Dann stolz sein, dass man ohne Computer viel geschafft hat. Wahrhaftige Kurvendiskussion!

Zuletzt ggf. noch rechnen.

mehrfache Nullstellen, Vielfachheit

WAS | WANN | WOMIT | WOZU | WARUM

- Definition
- Von Hand Felderabstreichen
- Für qualitative Graphen
- Für Verstehen und Computer Besiegen
- Für Eigentätigkeit und Freude am Erfolg
- Um über Kurven wahrhaft zu diskutieren

Beispiele:

Polynome,

Trigon. Funktionen

Quotienten-Fkt

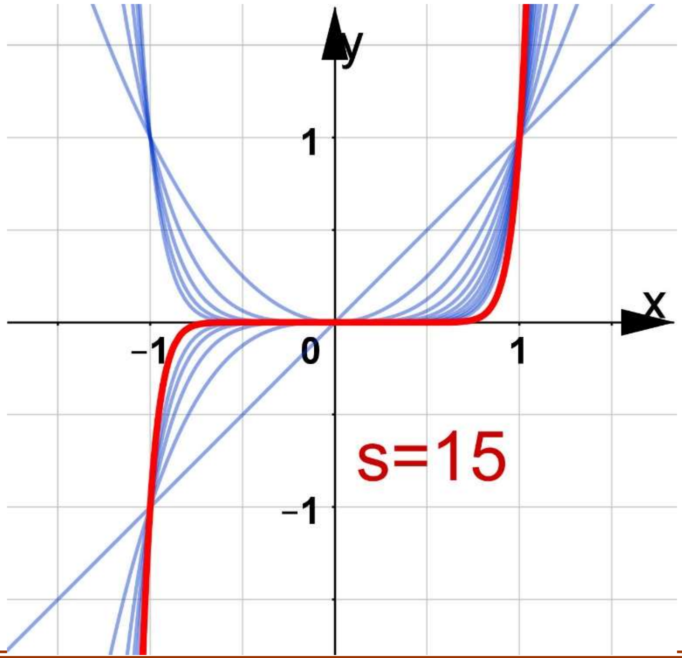
Was sind „mehrfache Nullstellen"?

Definition

- Kann man eine Funktion schreiben als

$$f(x) = (x-a)^s g(x) \quad \text{mit } g(a) \neq 0 \text{ und } s > 0,$$

dann hat f in a eine Nullstelle der Vielfachheit s.



- s=1 einfacher Nulldurchgang
- s=2 parabelförmige Berührung
- s=3 einfacher Sattel
- s gerade → topfförmige Berührnullstelle
- s ungerade → sattelförmiger Nulldurchgang

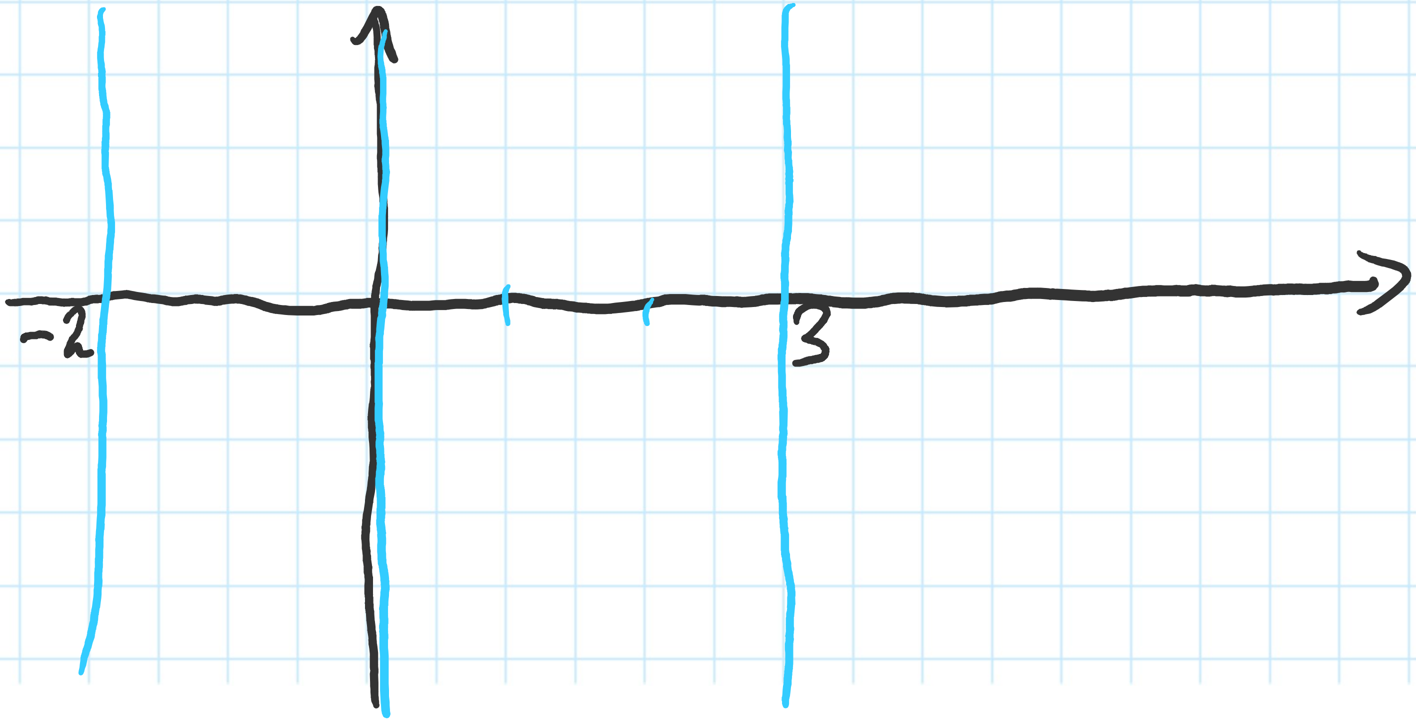
Topf fällt um!

- **Je größer s ist, desto breiter sind Töpfe und Sättel**

Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$$f(x) = (x+2)(x-a)^3(x-3)^2$$

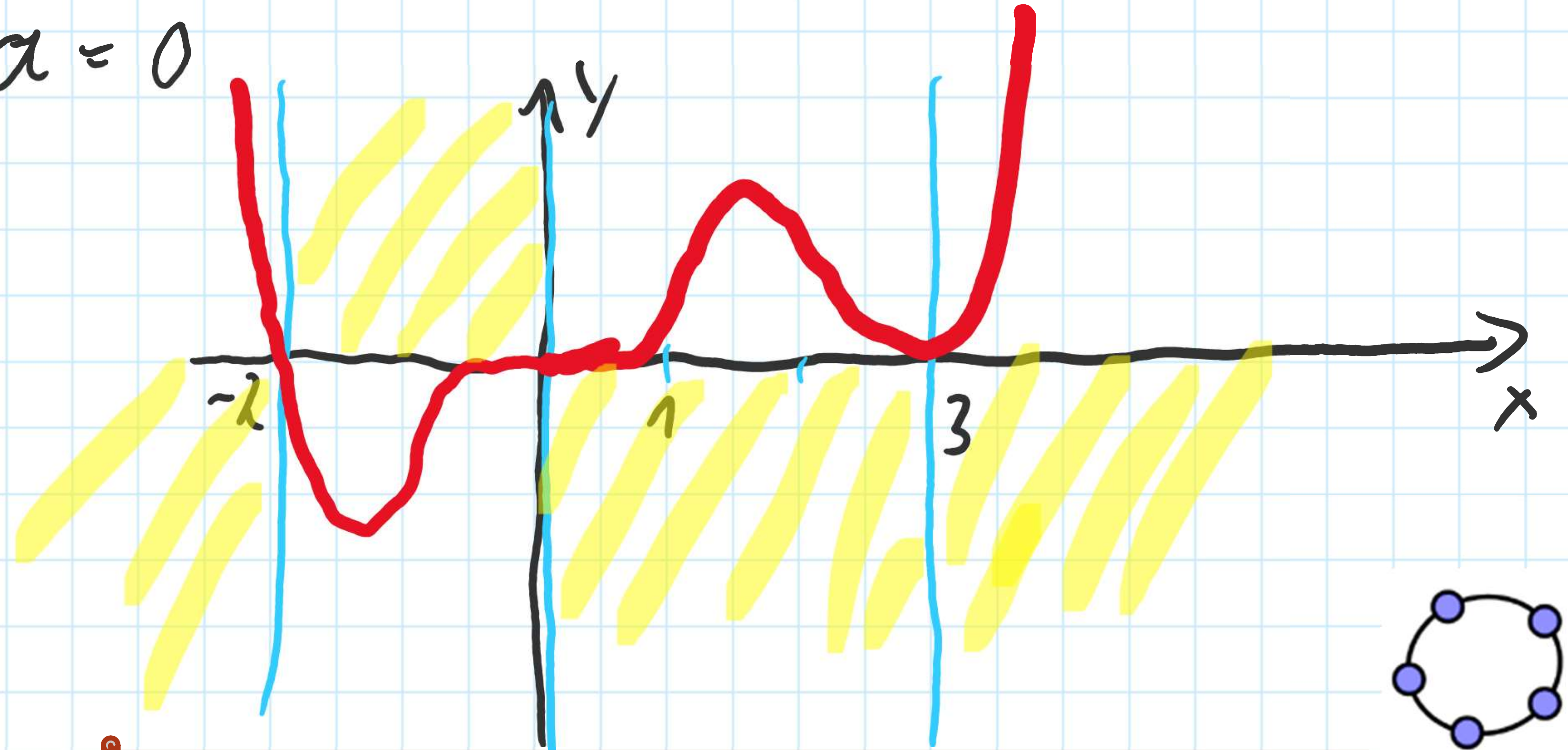
$a = 0$



Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$$f(x) = (x+2)(x-a)^3(x-3)^2$$

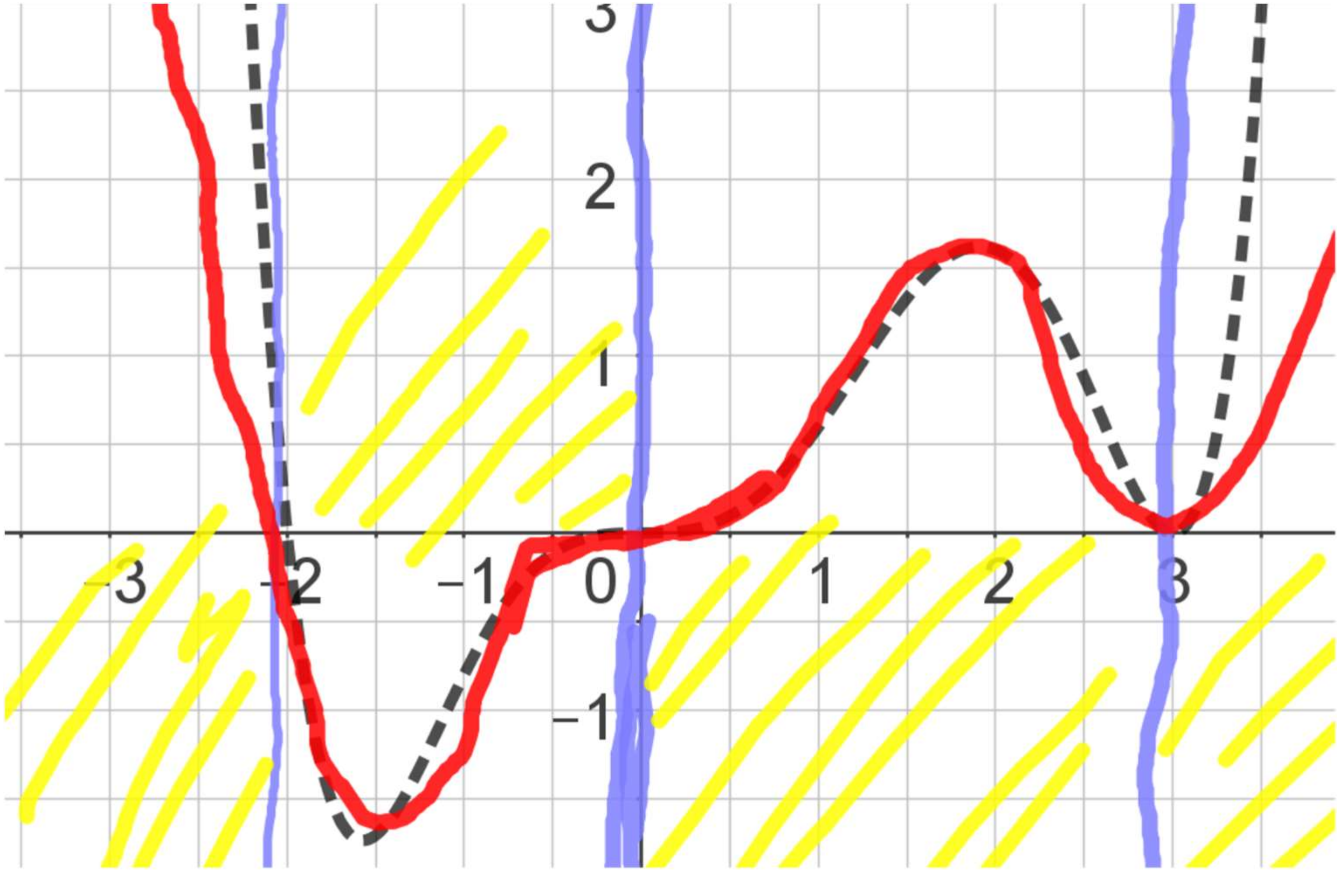
$a = 0$



Felderabstreichen, qualitative Graphen erzeugen

Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$$f(x) = t(x+2)x^3(x-3)^2$$



Qualitativer Graph:

Was fordert man?

Was muss nicht stimmen?

Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$$f(x) = t(x+2)x^3(x-3)^2$$

Warum ist der Nullstellentyp jeweils schon erkennbar?

…, weil die anderen Faktoren zusammen (i.W.) nur einen **Streckfaktor** erzeugen.

Verhalten in der Nähe der Nullstellen

$x_0 = -2$ ☑Genauer

$y = t(x+2)(-2)^3(-2-3)^2 = -200t(x+2)$

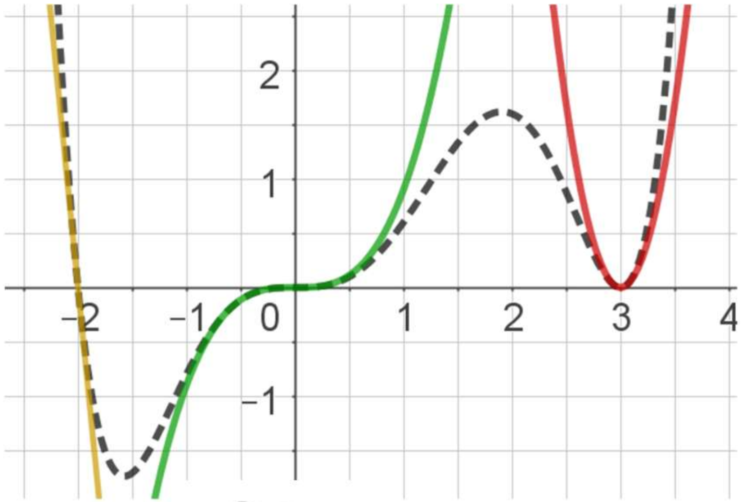
☑bei x=-2

$x_0 = 3$ $y = t(0+2)x^3(0-3)^2 = 18tx^3$

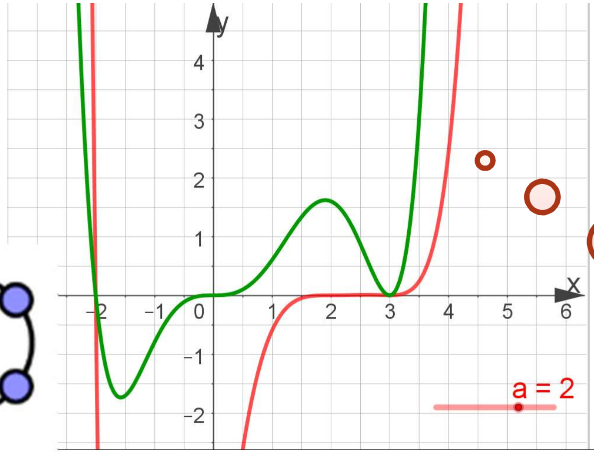
☑bei x=0

$x_0 = a$ $y = t(3+2)3^3(x-3)^2 = 135t(x-3)^2$

☑bei x=3



Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind



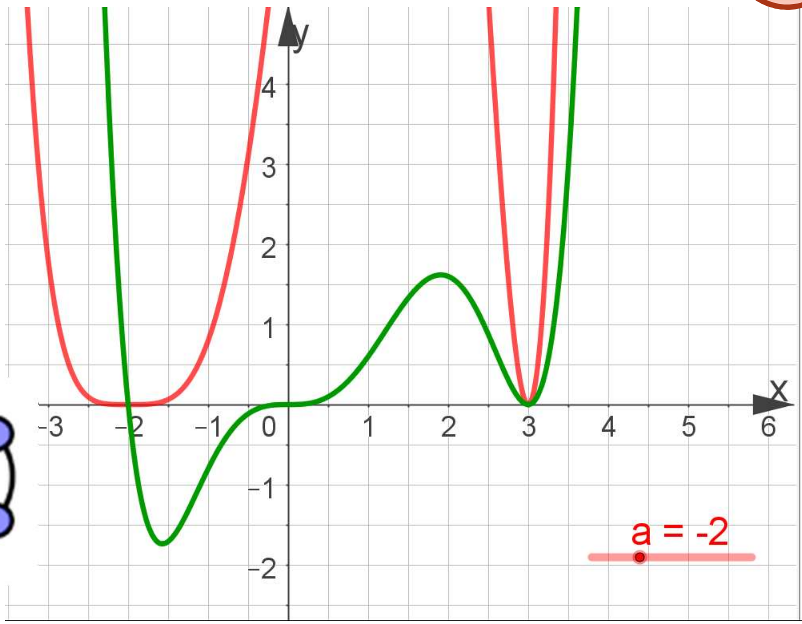
$y = t(x+2)(x-a)^3(x-3)^2$

Asymtote bei -2 ???? ☐asy

Sattel bei 2.3 ????? ☐satt

wenn man nur Rot sieht

Graphen brauchen Denken



$y = t(x+2)(x-a)^3(x-3)^2$

Asymtote bei -2 ???? ☐asy

Sattel bei 2.3 ????? ☐satt

N E I N

a=-2 vierfache Nst. bei x=-2

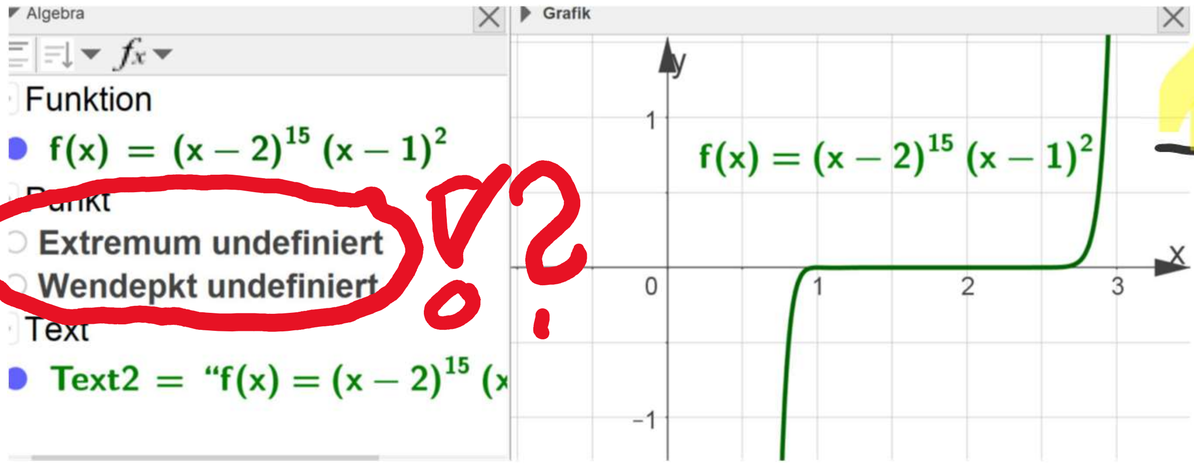
a=3 fünffache Nst. bei x=3

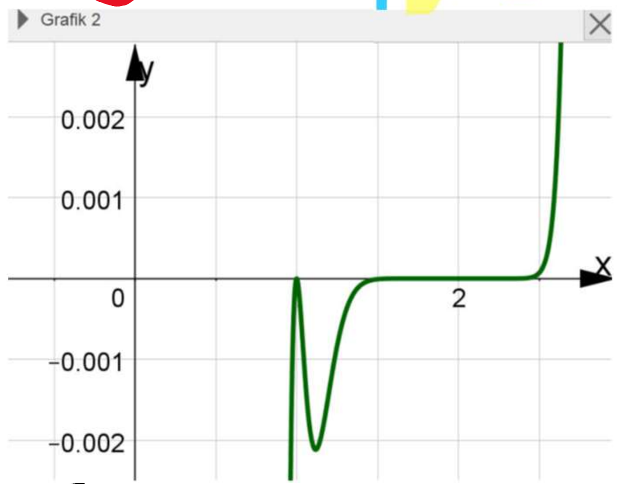
Sonst 3-fache Nst. bei a

Übersicht für alle a

Platt oder nicht platt?

$f(x)=(x-1)^2(x-2)^{15}$





Graphenzeichnen mit Computer lohnt allenfalls am Ende!

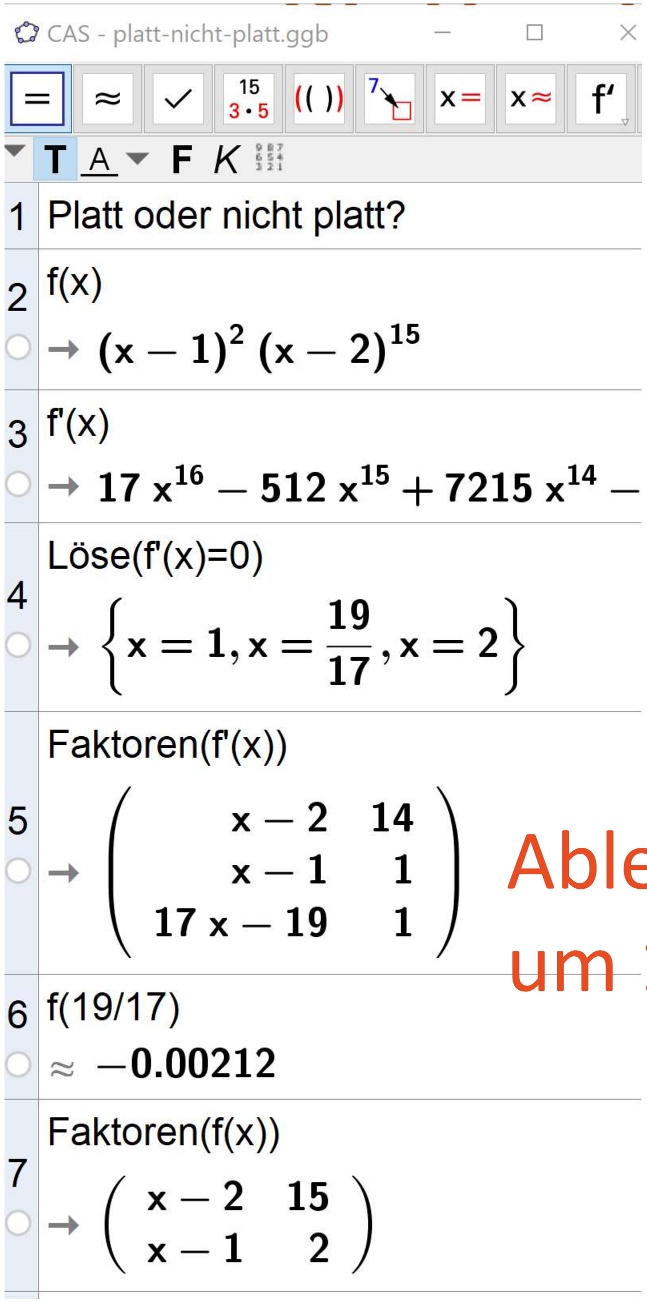
$$f'(x) = 15(x-2)^{14}(x-1)^2 + (x-2)^{15}\cdot 2(x-1)$$

$$= (x-2)^{14}(x-1)\cdot\left[15(x-1)+2(x-2)\right]$$

$$= (\quad)(\quad)\left[17x-19\right]$$

$$f\left(\tfrac{19}{17}\right) = -0{,}002\ldots$$

Das Extremum findet man sogar von Hand



Platt oder nicht platt?

f(x)=$(x-1)^2(x-2)^{15}$

Zum Rechnen so nicht zu gebrauchen

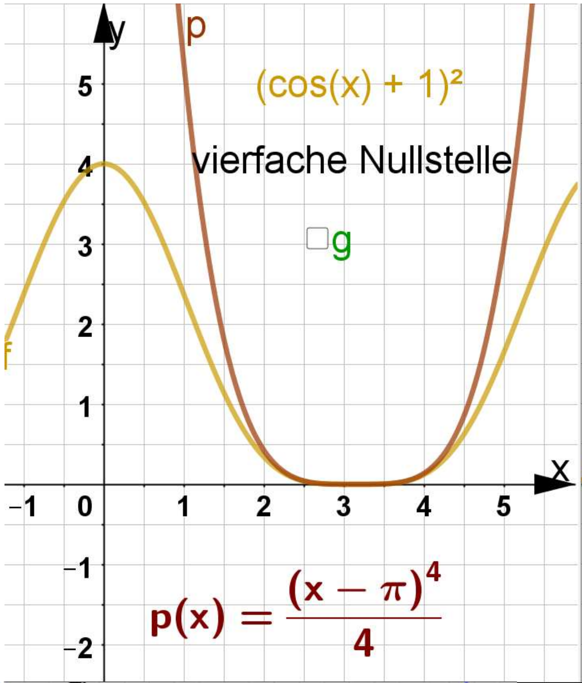
Aber GeoGebra CAS kommt damit zurecht.

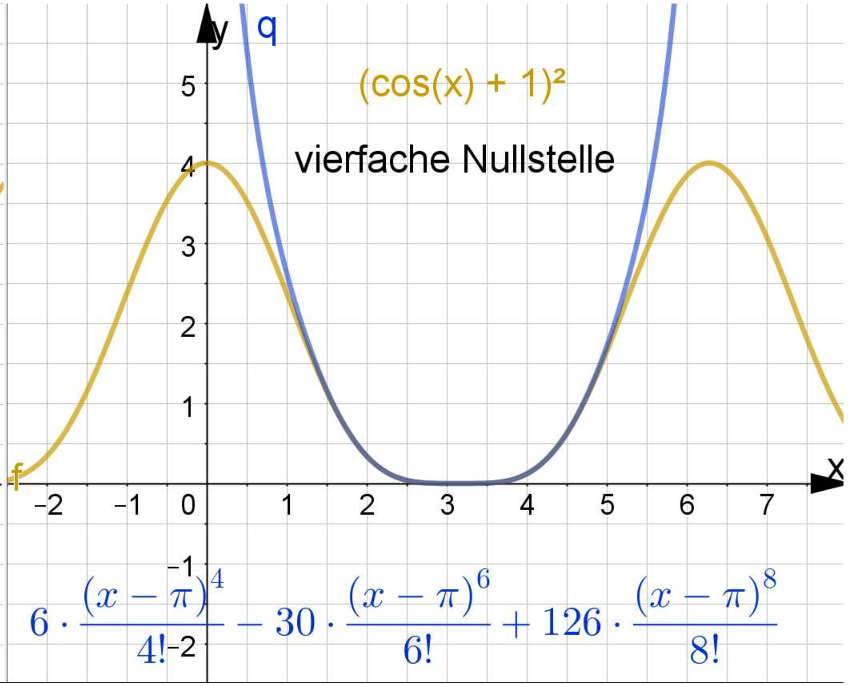
Ableiten reduziert jede Vielfachheit um 1.

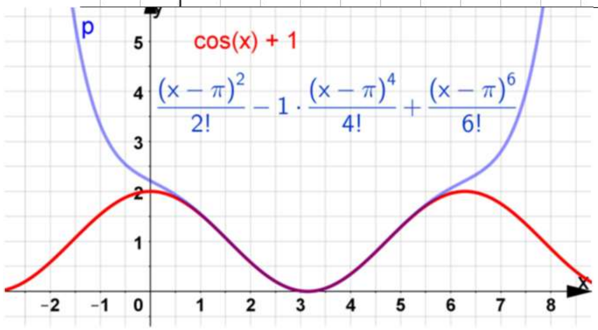
Ohne das Konzept der Vielfachheit,
kommt die Wahrheit wohl kaum ans Licht!

Vielfachheit der Nullstellen

auch bei beliebigen Funktionen nützlich







Bei π ist und bleibt eine vierfache Nullstelle, egal wie weit ich die Taylornäherung treibe.

Entsprechend haben Sinus und Kosinus „Hügel und Täler“ vom Grad 2.

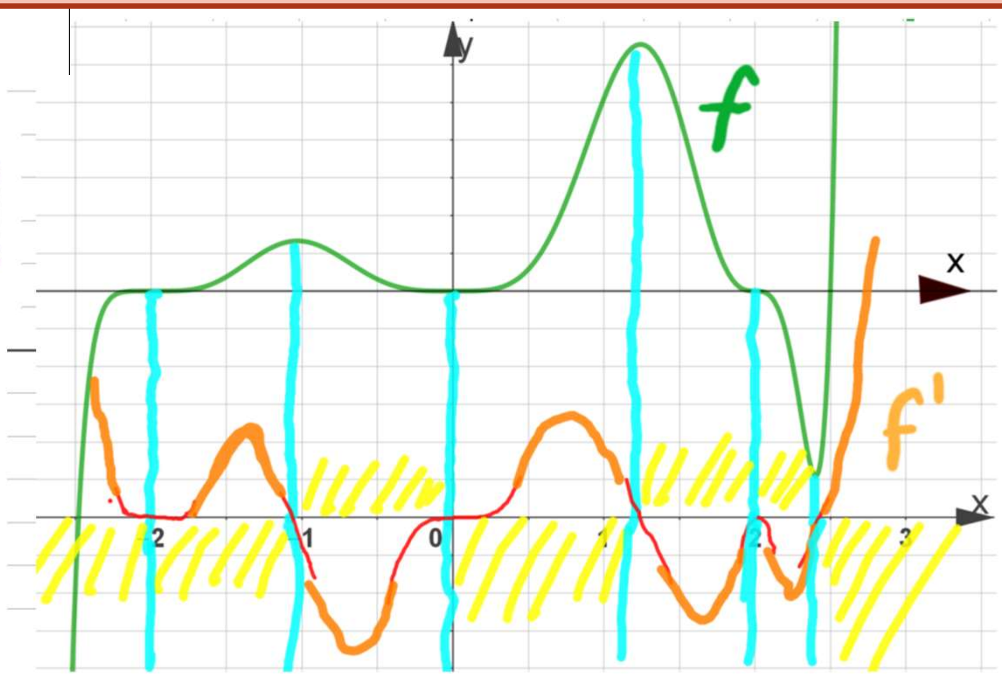
Ableitungen reduzieren die Vielfachheit um 1

1	f(x):=(x-a)^s g(x) → $f(x) := g(x)\,(-a+x)^s$	Beweis
2	f'(x) → $(-a+x)^s\, g'(x) + s\, g(x)\,(-a+x)^{s-1}$	
3	f'(x)=(-a+x)^(s-1)*gg(x) → $(-a+x)^s\, g'(x) + s\, g(x)\,(-a+x)^{s-1} = gg(x)\,(-a+x)^{s-1}$	
4	gg(x):=(-a+x)g'(x)+s g(x) → $gg(x) := s\, g(x) + g'(x)\,(-a+x)$	
5	gg(a) → $s\, g(a)$ $\neq 0$	

Polynomgleichung finden

- Den grünen Graphen f auf Karopapier geben.
- Welche Gleichung hat er etwa?

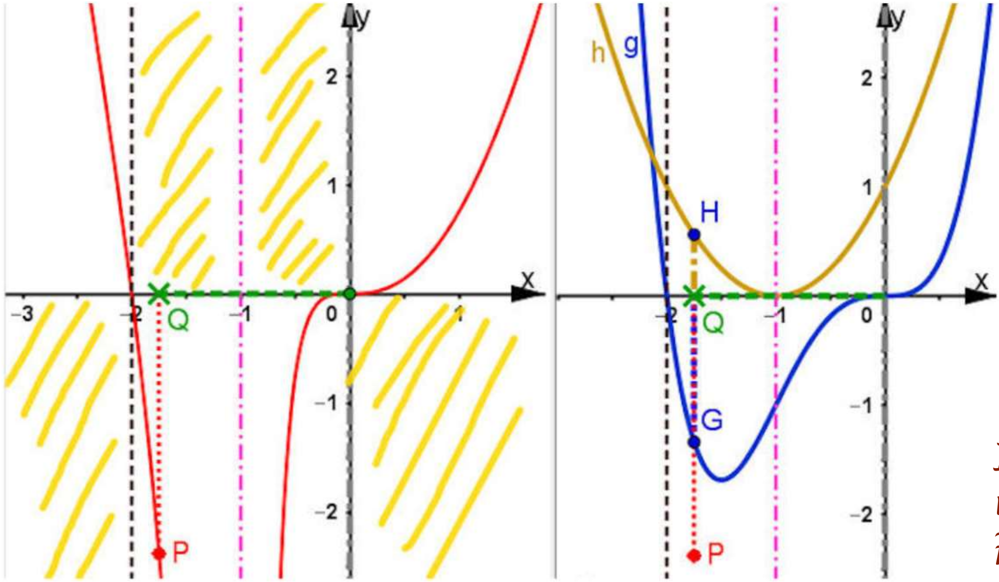
$$\boxed{f(x) = t(x+2)^5 x^4 (x-2)^3 (x-2.5)}$$



- **Einen qualitativen Graphen für die Ableitung f‘ mit Felderabstreichen herleiten.**

hilfsmittelfrei

Quotienten von Polynomen

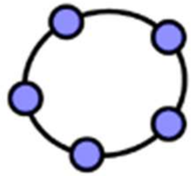


$$f(x) = \frac{(x+2)x^3}{(x+1)^2}$$

$$g(x) = (x+2)\ x^3$$

$$h(x) = (x+1)^2$$

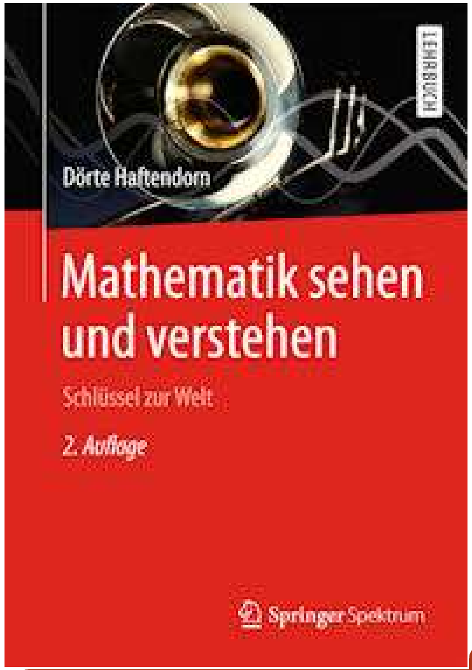
In GeoGebra nebeneinander in zwei Fenstern



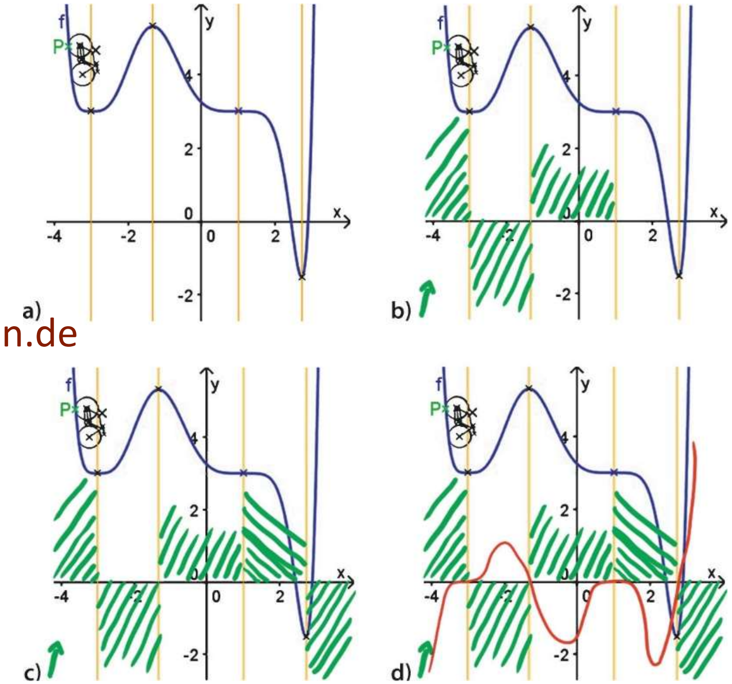
- Zähler und Nenner sind sofort vertraut, da die Vielfachheiten klar sind
- Für alle Nullstellen Feldergrenzen zeichnen
- Felderabstreichen
- Falls alle Nst. ungleich:
  - Nenner-Nst. erzeugen Pole ohne/mit ZW
  - Zähler-Nst. behalten ihre Vielfachheit
  - Asymptoten: Grad = Max(Zählergrad-Nennergrad, null)
- Bei übereistimmenden Nullstellen nimmt man die stetige Fortsetzung

Hilfsmittelfrei
Ohne Rechnungen
möglich

Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen



www.kurven-erkunden-und-verstehen.de



Hier wie dort:
Alle *.ggb und die meisten Bilder frei verfügbar

3. Auflage
Verm. März 2019

21 dazu: Keltische Knoten zeichnen, Polynome im Affenkasten, Fkt.-Quotienten

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit