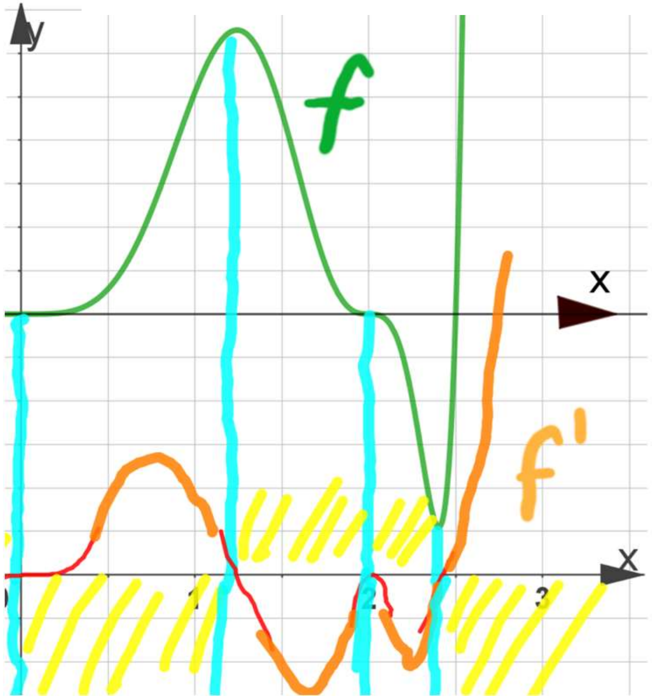
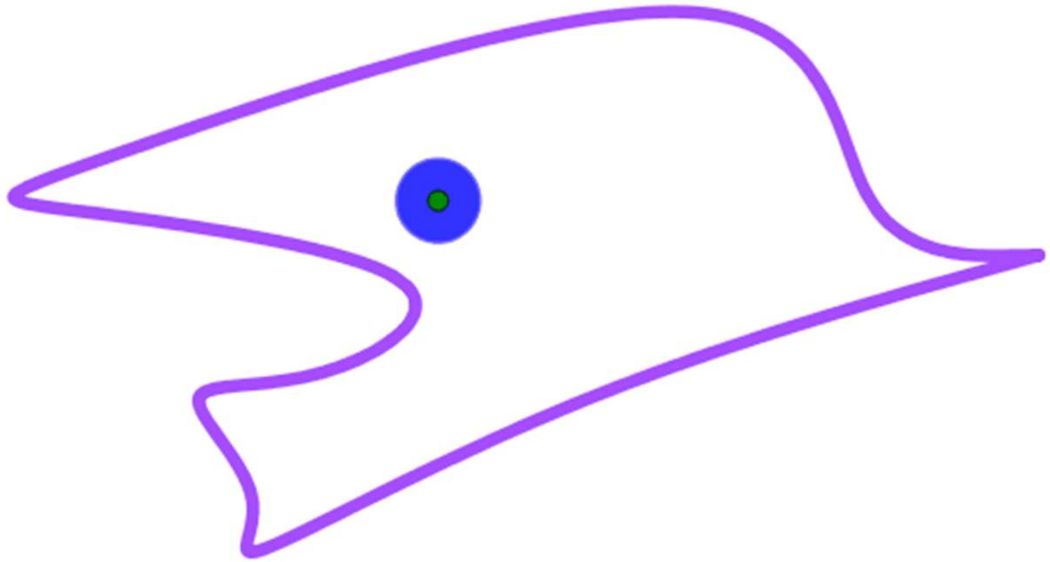
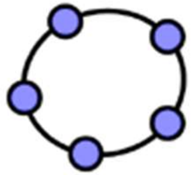
Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

8. Juli 2021 Karlsruhe KIT -> Mathematatik Didaktik

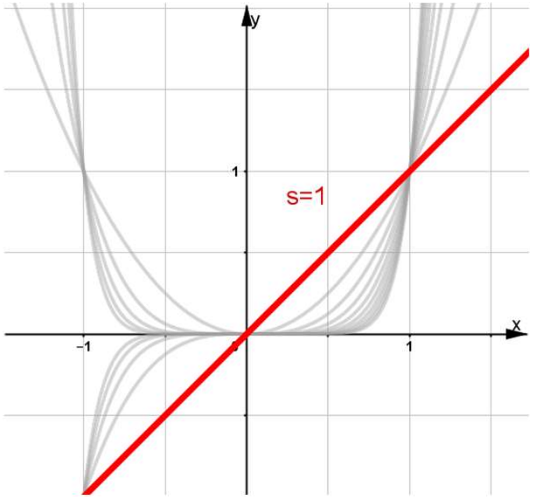


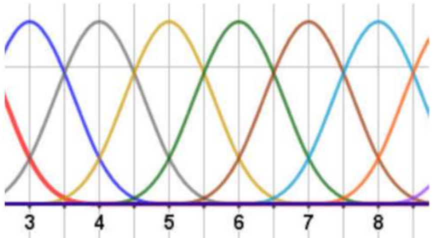


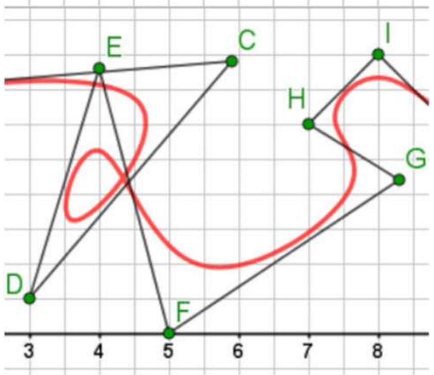
Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik bei Splines und NURBS



Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen







1. Polynome von Hand erkunden aus Linearfaktoren, z.B.

$$f(x) = (x+2)^5 x^4 (x-2)^3 (x-3)$$

2. Polynomquotienten erkunden, z.B. $f(x) = \dfrac{(x+2)x^3}{(x+1)^2}$

3. Bézier-Splines, B-Splines und NURBS

Was sind „mehrfache Nullstellen“?

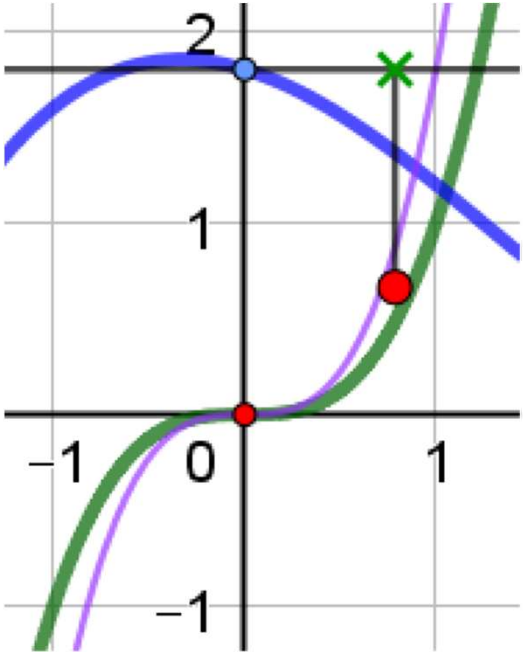
Definition

g stetig in a

- Kann man eine Funktion schreiben als

$f(x) = (x-a)^s g(x)$ mit $g(a) \neq 0$ und $s > 0$,

dann hat f in a eine Nullstelle der Vielfachheit s.



Was sind „mehrfache Nullstellen“?

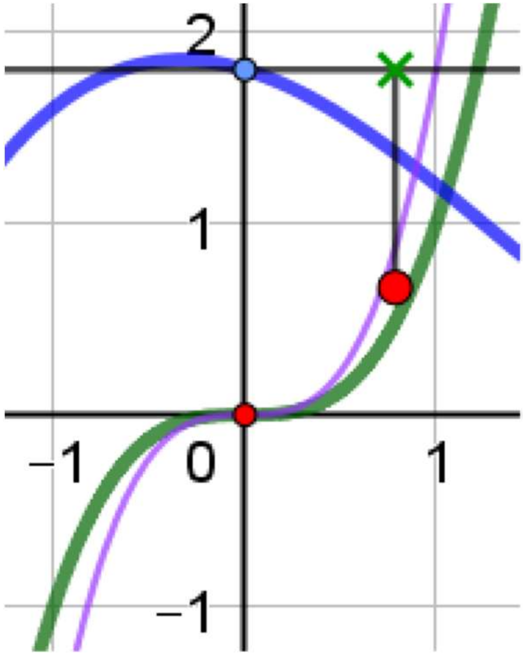
Definition

g stetig in a

- Kann man eine Funktion schreiben als

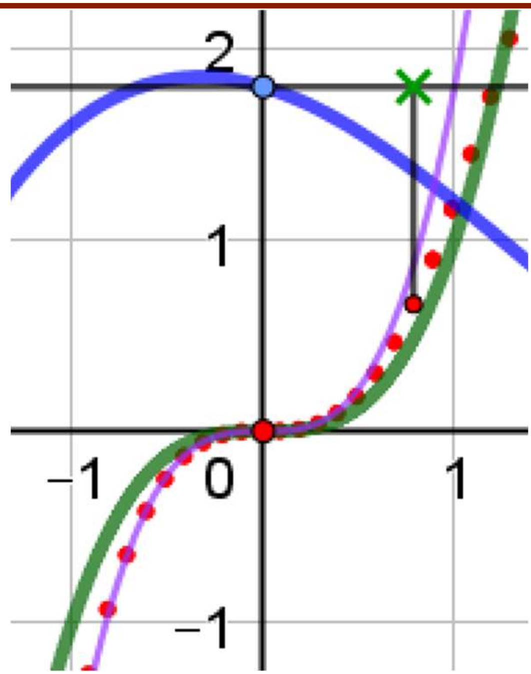
$f(x) = (x-a)^s g(x)$ mit $g(a) \neq 0$ und $s > 0$, $s \in \mathbb{N}$

dann hat f in a eine <u>Nullstelle der Vielfachheit s.</u>



Nahe a wirkt $g(a)$ als Faktor.

Evt. genauer



1. Polynome von Hand erkunden

$$f(x) = (x+2)x^3(x-3)^2$$

Erst schrittweise den Graphen verstehen.

1. Polynome von Hand erkunden

$$f(x) = (x+2)x^3(x-3)^2$$

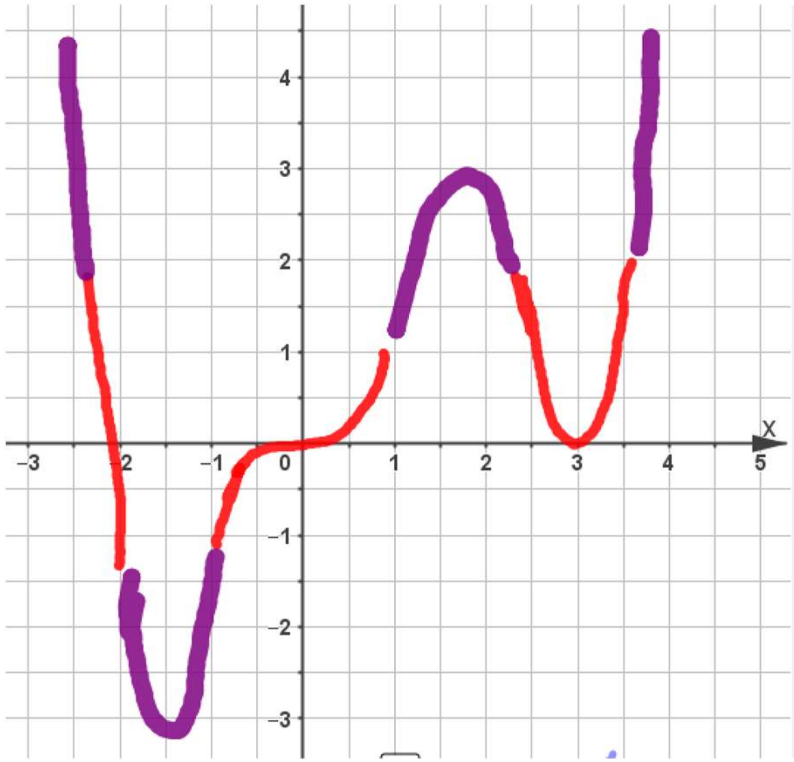
Erst den schrittweise den Graphen verstehen.

SCHRITTE:

- Gesamtverlauf begreifen
- Felderabstreichen
- Vielfachheit beachten
- Qualitativen Graphen erzeugen

Dann stolz sein, dass man ohne Computer viel geschafft hat.

Wahrhaftige Kurvendiskussion!



1. Polynome von Hand erkunden

$$f(x) = (x+2)x^3(x-3)^2$$

Erst den schrittweise den Graphen verstehen.

Wahrhaftige Kurvendiskussion!

Dann mit Computer prüfen.

Näherungsfunktionen berechnen:

☑ bei x=-2

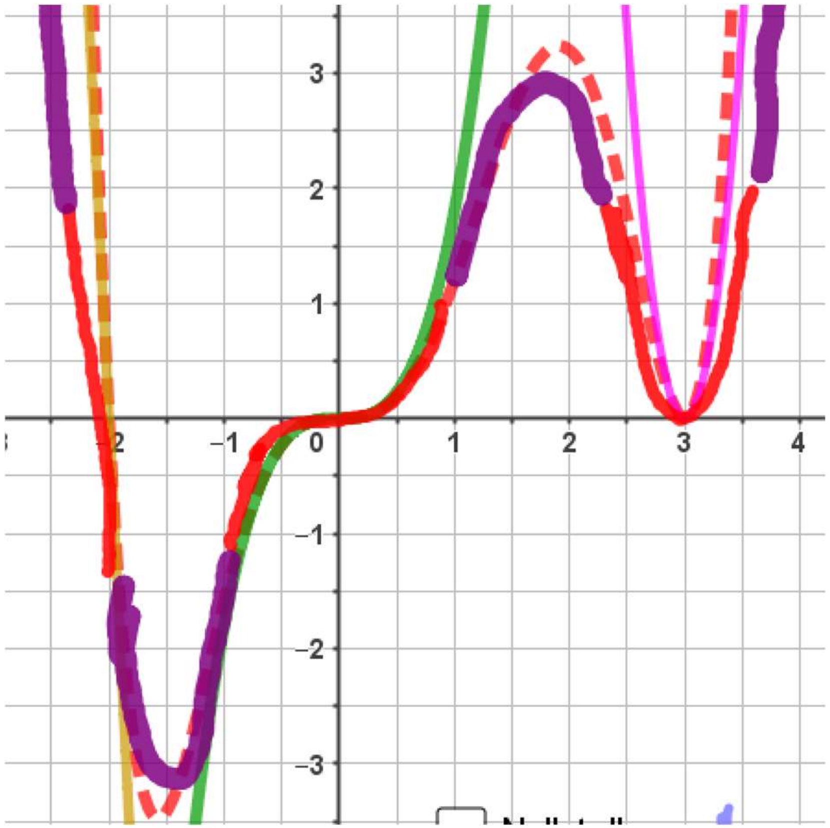
$$y = t(x+2)(-2)^3(-2-3)^2 = -200t(x+2)$$

☑ bei x=0

$$y = t(0+2)x^3(0-3)^2 = 18tx^3$$

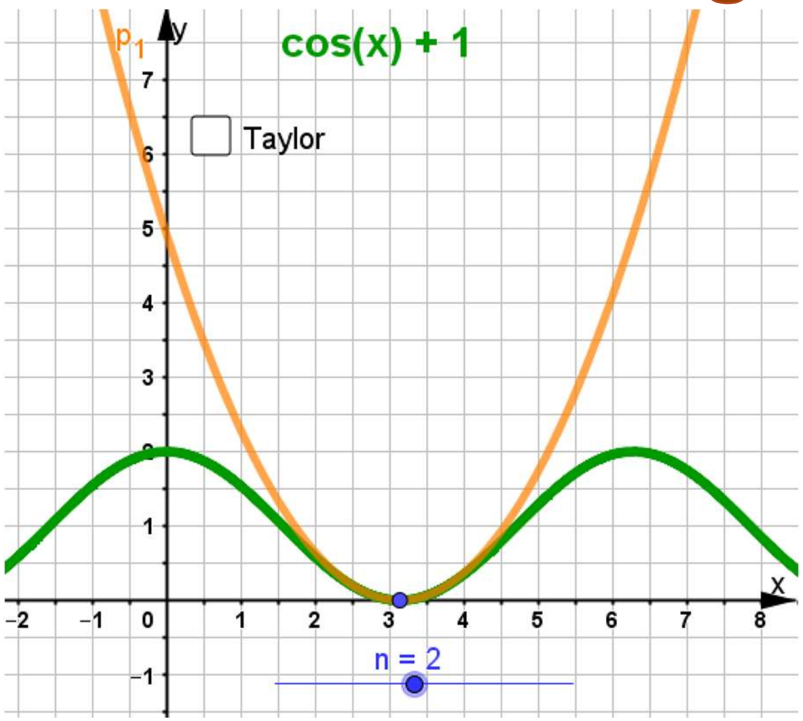
☑ bei x=3

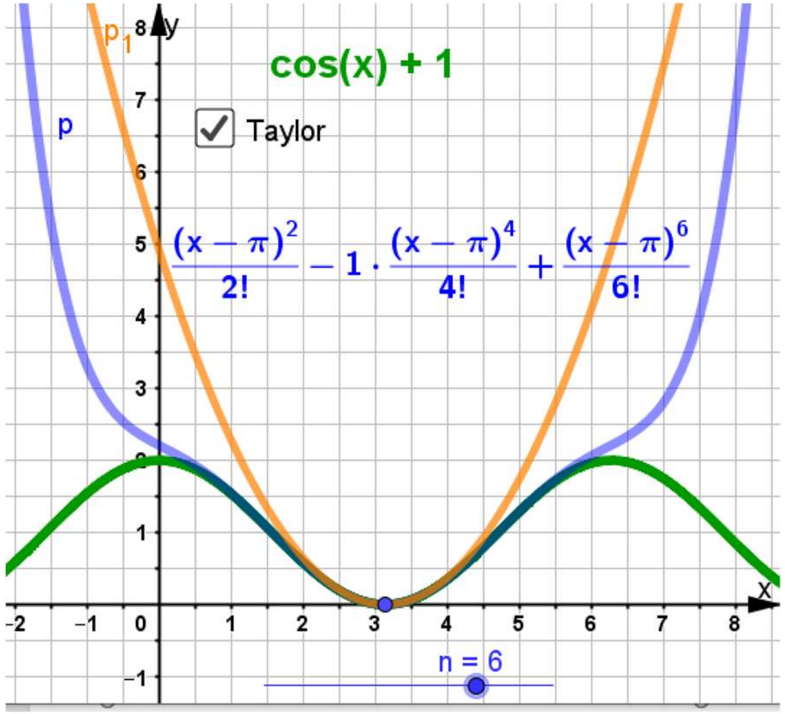
$$y = t(3+2)3^3(x-3)^2 = 135t(x-3)^2$$



Vielfachheit der Nullstellen

auch bei beliebigen Funktionen nützlich





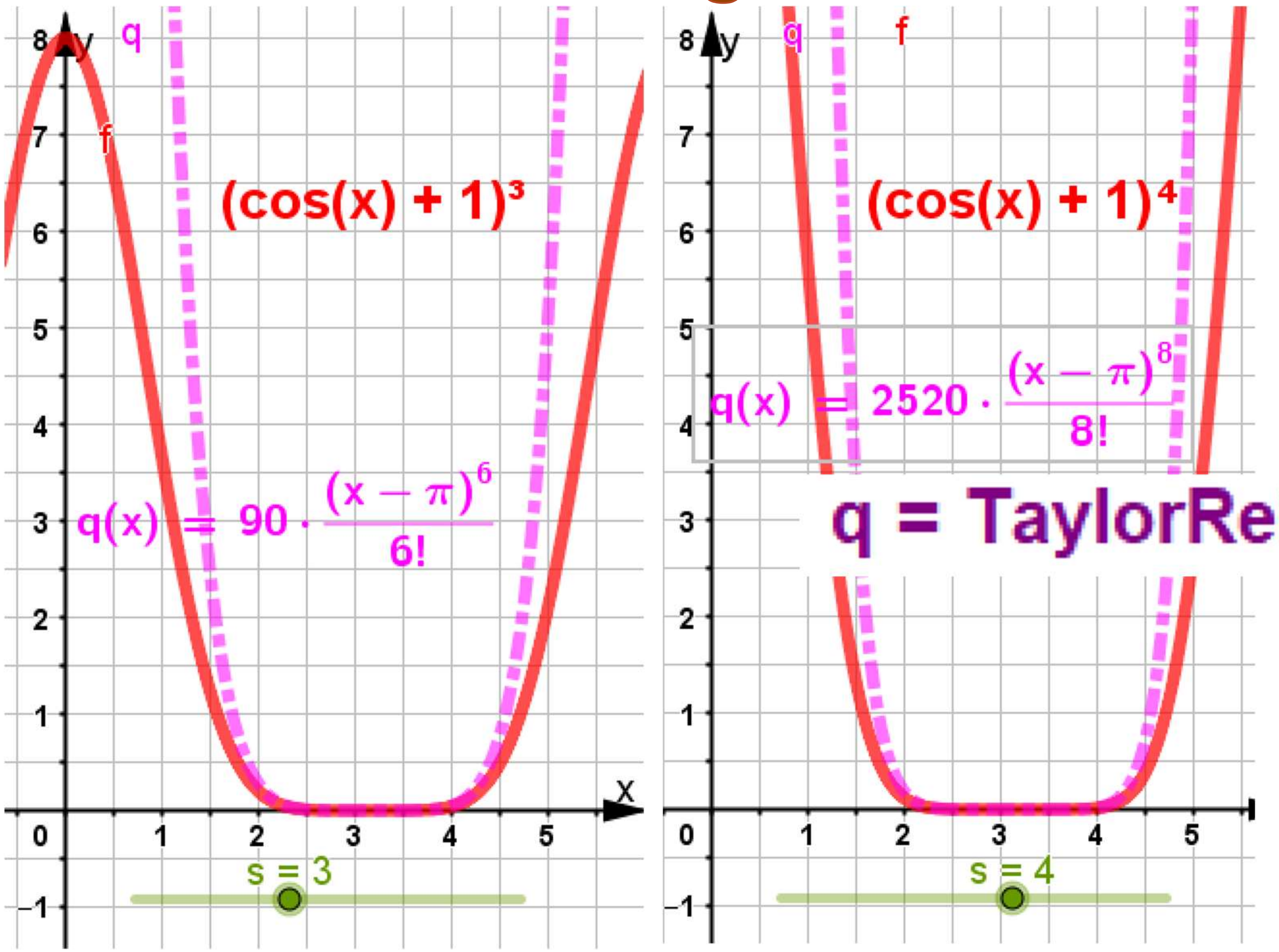
Sinus und Kosinus „Hügel und Täler“ vom Grad 2.

Bei π ist und bleibt eine doppelte Nullstelle, egal wie weit ich die Taylornäherung treibe.

evt.

Vielfachheit der Nullstellen

auch bei beliebigen Funktionen nützlich



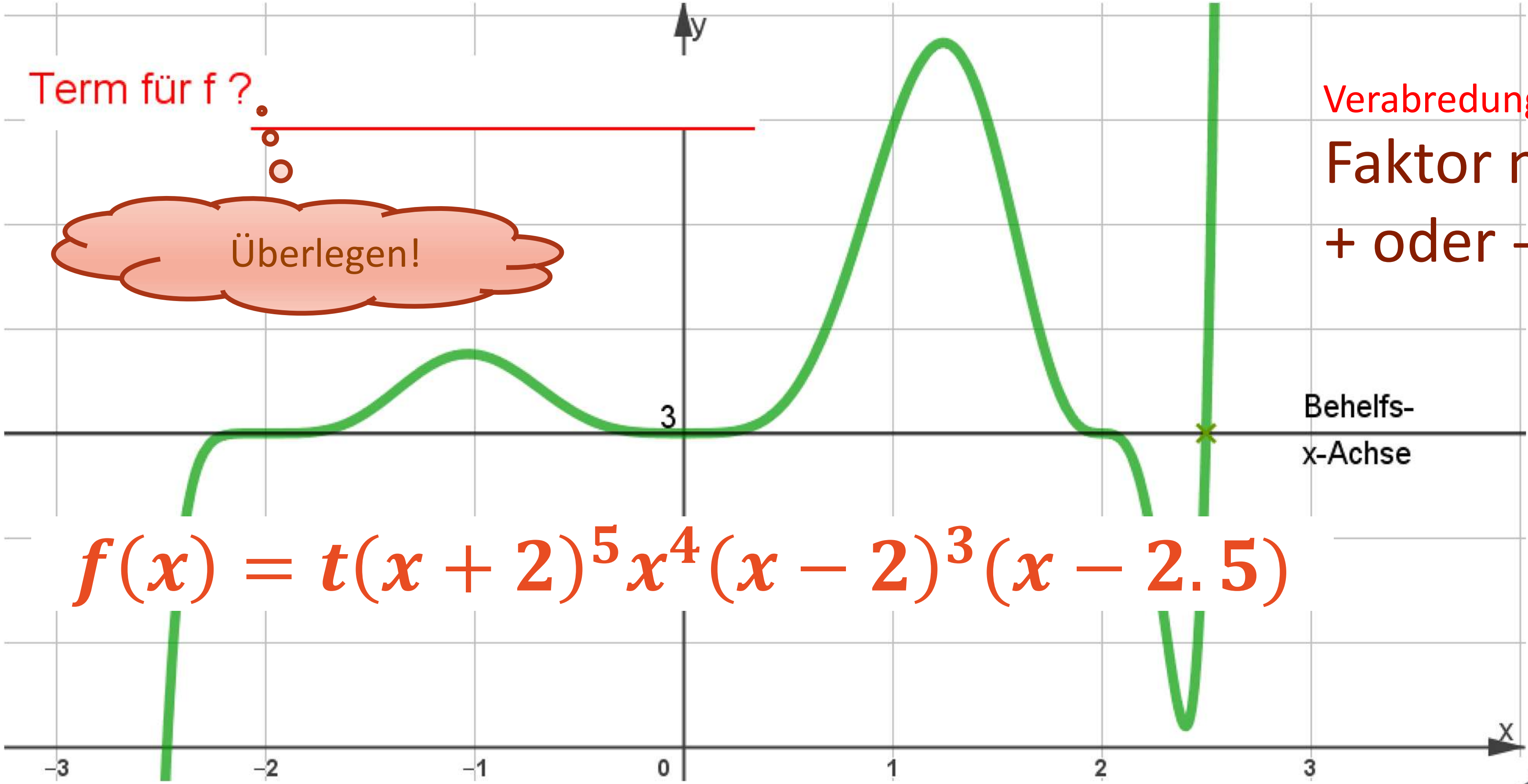
q = TaylorReihe(f, π, 2s)

evt.

Polynomgleichung finden

hilfsmittelfrei

- Den grünen Graphen f auf Karopapier geben.
- Welche Gleichung hat er etwa?



$$f(x) = t(x+2)^5 x^4 (x-2)^3 (x-2.5)$$

Verabredungen

Faktor nur + oder -

Nachher:

Verabredungen

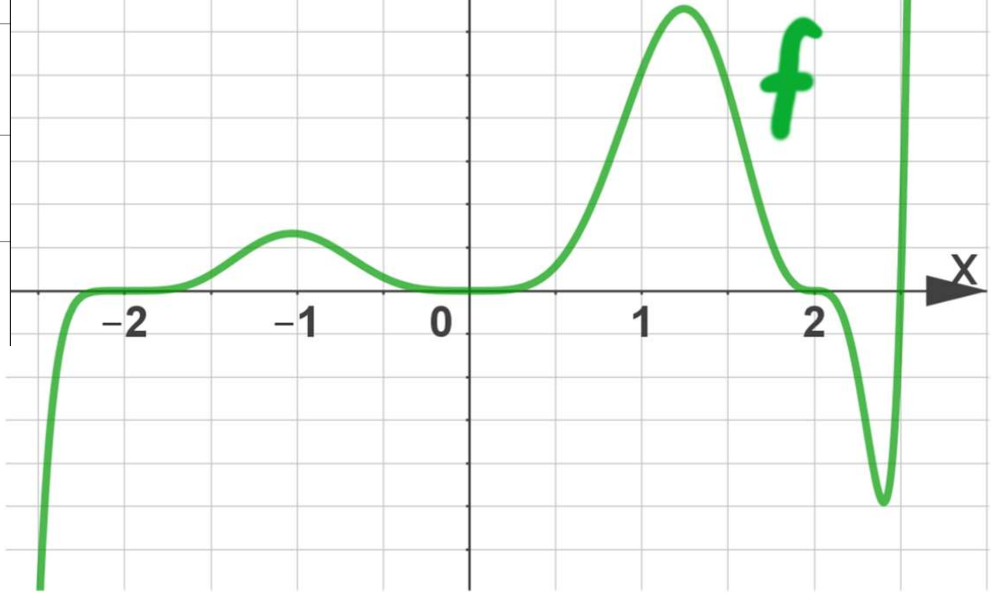
Vielfachheit 1, 3 oder aus {5, 7,...} Vielfachheit 2, oder aus {4, 6,...}

Ableitungen reduzieren die Vielfachheit um 1

1	f(x):=(x-a)^s g(x) → $f(x) := g(x)\,(-a+x)^s$
2	f'(x) → $(-a+x)^s\, g'(x) + s\, g(x)\,(-a+x)^{s-1}$
3	f'(x)=(-a+x)^(s-1)*gg(x) → $(-a+x)^s\, g'(x) + s\, g(x)\,(-a+x)^{s-1} = gg(x)\,(-a+x)^{s-1}$
4	gg(x):=(-a+x)g'(x)+s g(x) → $gg(x) := s\, g(x) + g'(x)\,(-a+x)$
5	gg(a) → $s\, g(a)$

n.V. ungleich null

Beweis mit GeoGebra CAS

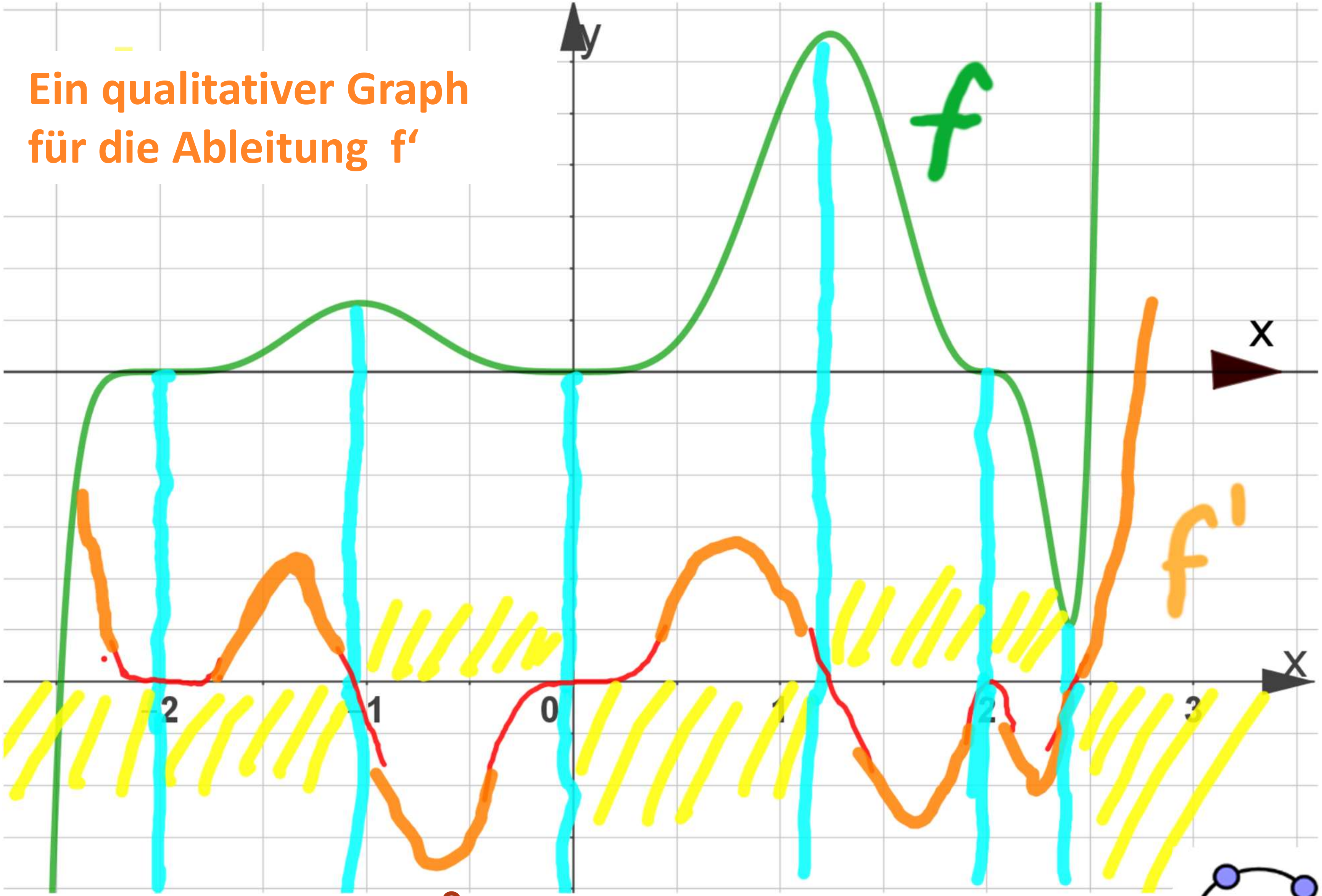


- **Ein qualitativer Graph für die Ableitung f' soll mit Felderabstreichen hergeleitet werden.**

hilfsmittelfrei

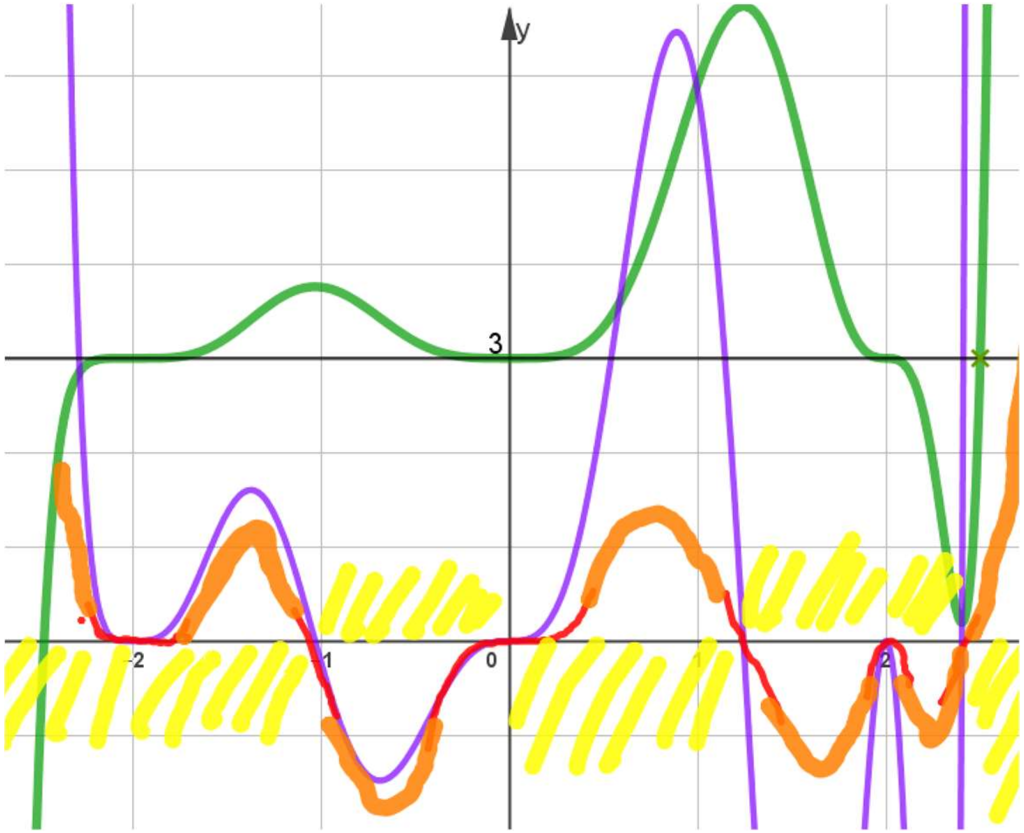
weiter

- Ein qualitativer Graph
- für die Ableitung f‘



hilfsmittelfrei

- **Ein qualitativer Graph**
- **für die Ableitung f‘**



GeoGebra CAS

1 f'(x)

$\rightarrow \frac{13}{125} x^{12} + \frac{18}{125} x^{11} - \frac{198}{125} x^{10} - \frac{56}{25} x^{9} +$

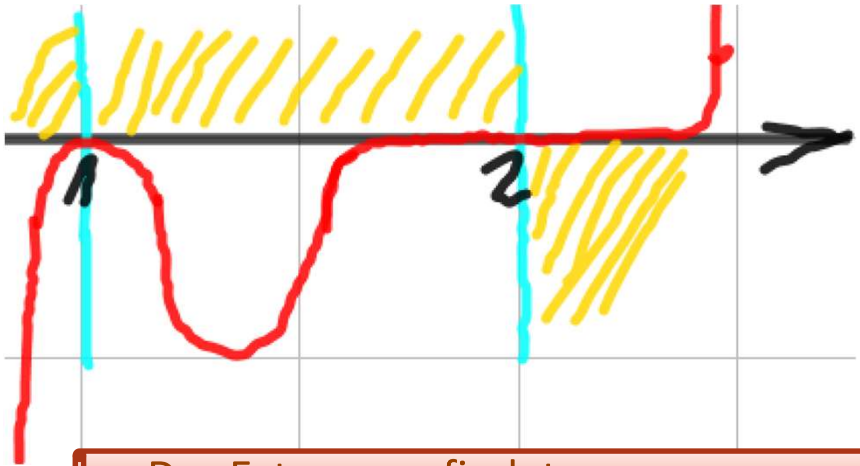
2 Faktoren(f'(x))

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x & 3 \\ x-2 & 2 \\ x+2 & 4 \\ 13x^3 - 34x^2 - 10x + 40 & 1 \\ 125 & -1 \end{pmatrix}$$

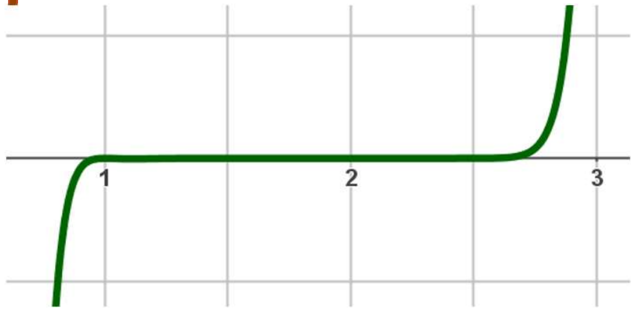
hilfsmittelfrei

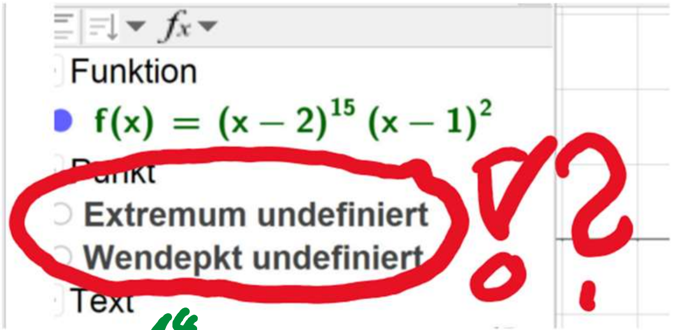
Platt oder nicht platt?

f(x)=$(x-1)^2(x-2)^{15}$



A
B
E
R





Das Extremum findet man sogar von Hand

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^{15} + (x-1)^2 \cdot 15(x-2)^{14}$$

$$= (x-1)(x-2)^{14}\left[2(x-2) + 15(x-1)\right]$$

$$= (x-1)(x-2)^{14}\left[17x - 19\right]$$

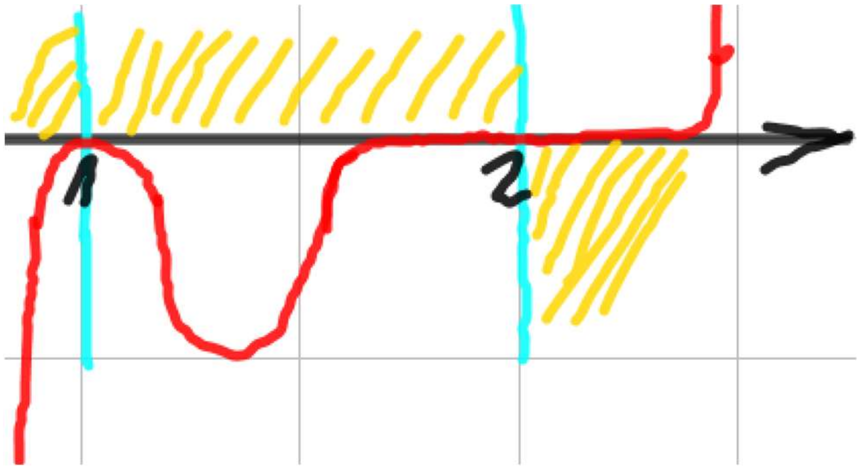
$$f'(x) = 0 \iff x = 1 \lor x = 2 \lor x = \frac{19}{17}$$

$$f\left(\frac{19}{17}\right) = -0{,}002$$

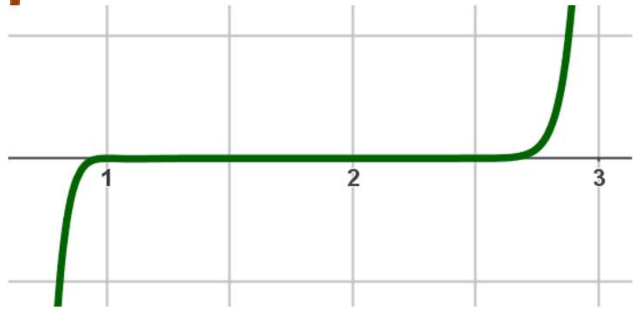
Weiter:

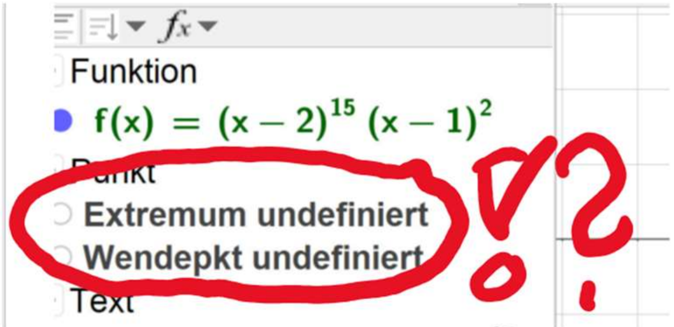
Platt oder nicht platt?

$f(x)=(x-1)^2(x-2)^{15}$

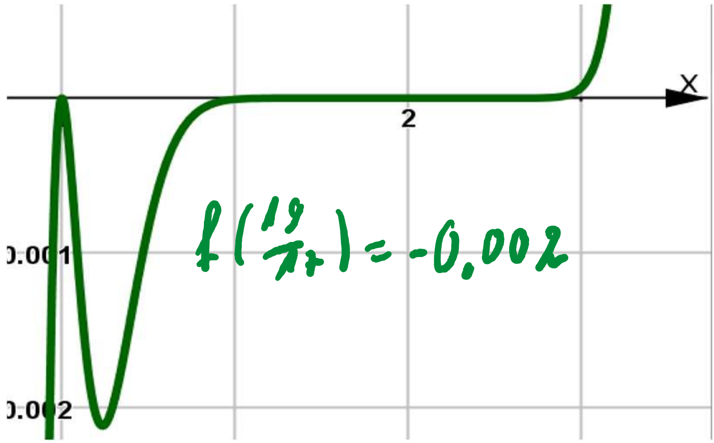


A
B
E
R





Graphenzeichnen mit Computer
lohnt allenfalls am Ende!



CAS - platt-nicht-platt.ggb

1 Platt oder nicht platt?

2 f(x)

$\rightarrow (x-1)^2 (x-2)^{15}$

3 f'(x)

$\rightarrow 17x^{16} - 512x^{15} + 7215x^{14} -$

4 Löse(f'(x)=0)

$\rightarrow \left\{x = 1, x = \frac{19}{17}, x = 2\right\}$

5 Faktoren(f'(x))

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-2 & 14 \\ x-1 & 1 \\ 17x-19 & 1 \end{pmatrix}$$

6 f(19/17)

≈ -0.00212

7 Faktoren(f(x))

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x-2 & 15 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Platt oder nicht platt?

f(x)=$(x-1)^2(x-2)^{15}$

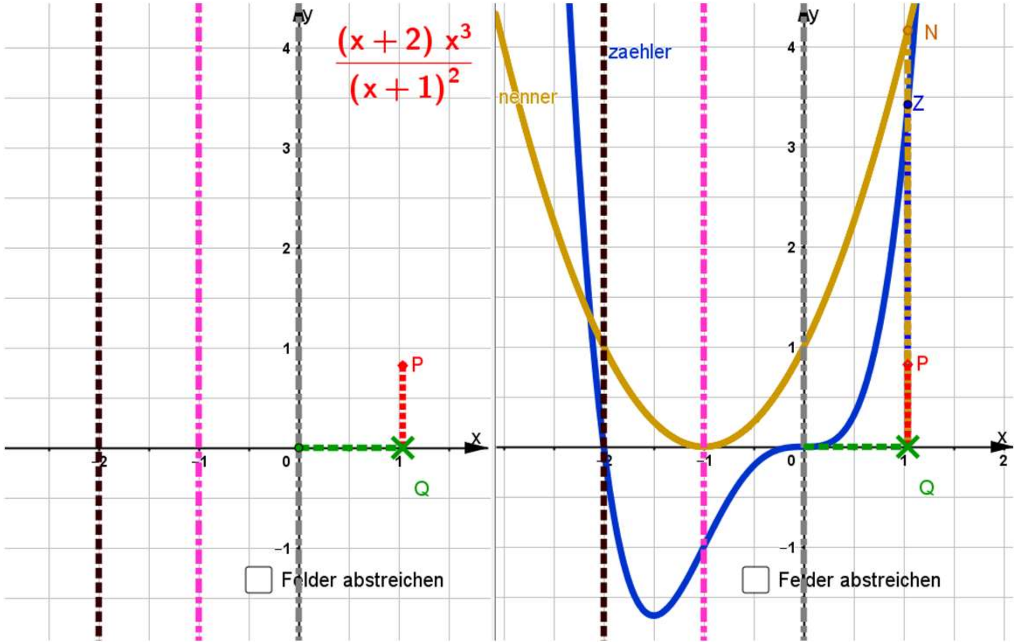
Zum Rechnen so nicht zu gebrauchen

Aber GeoGebra CAS kommt damit zurecht.

Ableiten reduziert jede Vielfachheit um 1.

Ohne das Konzept der Vielfachheit kommt die Wahrheit wohl kaum ans Licht!

Quotienten von Polynomen



$$f(x) = \frac{(x+2)x^3}{(x+1)^2}$$

$$g(x) = (x+2)\ x^3$$

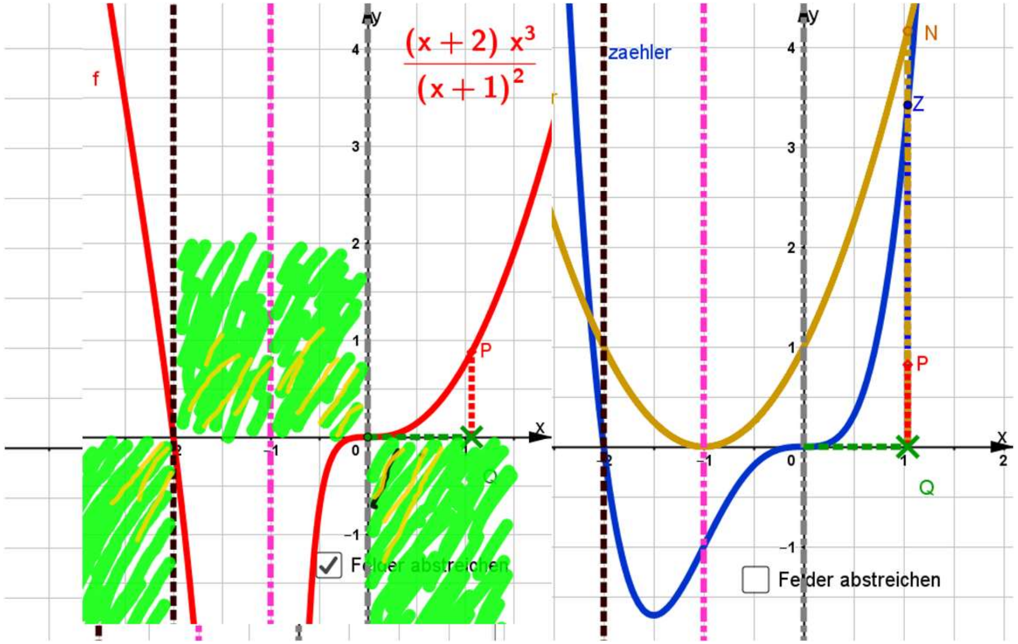
$$h(x) = (x+1)^2$$

In GeoGebra nebeneinander in zwei Fenstern

- Zähler und Nenner sind sofort vertraut, da die Vielfachheiten klar sind
- Für alle Nullstellen Feldergrenzen zeichnen:
  - hier grau für Zählernullstellen,
  - pink für Nennernullstellen

Hilfsmittelfrei
Ohne Rechnungen
möglich

Quotienten von Polynomen



$$f(x) = \frac{(x+2)x^3}{(x+1)^2}$$

$$g(x) = (x+2)\ x^3$$

$$h(x) = (x+1)^2$$

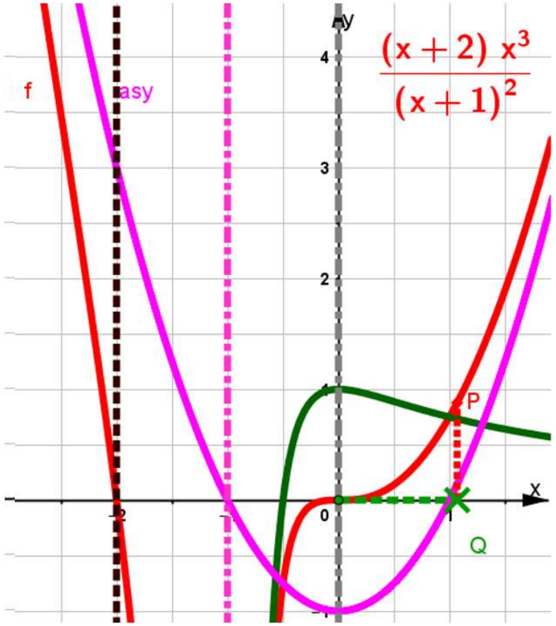
In GeoGebra nebeneinander in zwei Fenstern

- Felderabstreichen
- Falls alle Nst. in Zähler und Nenner verschieden sind :
  - Nenner-Nst. erzeugen Pole
    - ohne ZW bei gerader Vielfachheit,
    - mit ZW bei ungerader Vielfachheit,
  - Zähler-Nst. behalten ihre Vielfachheit
- Bei gemeinsamen Nullstellen kürzt man die übereinstimmenden Linearfaktoren und nimmt die **stetige Fortsetzung.**

Hilfsmittelfrei
Ohne Rechnungen
möglich

ZW=Zeichenwechsel

Quotienten von Polynomen



Polynomdivision

Division(zaehler, nenner)

liefert $\{x^2 - 1, 2x + 1\}$

Asymptote und Rest

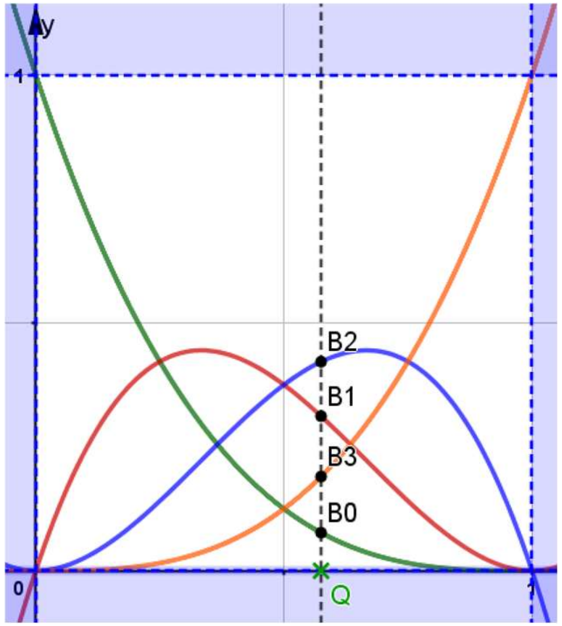
weiter

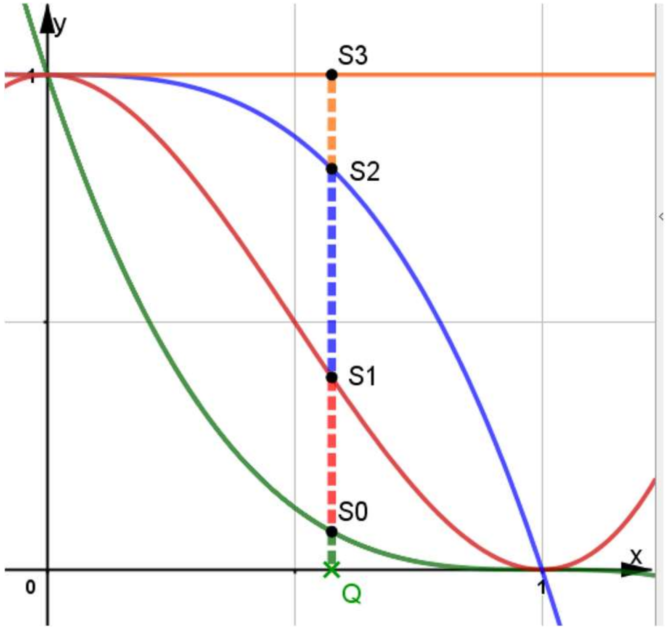
$$q(x) = x^2 - 1 + \frac{2x + 1}{(x+1)^2}$$

- Die Asymptoten bestimmt man durch Polynomdivision
  - von Hand oder mit obigem Befehl
- Falls alle Nst. ungleich sind, haben die Asymptoten folgenden
  - Grad = Max(Zählergrad - Nennergrad, null)
- Bei übereinstimmenden Nullstellen nimmt man die
  - stetige Fortsetzung

Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik

Bernsteinpolynome





Die Summe der Ordinaten ist an jeder Stelle 1.

$b0(x) = (1 - x)^3$

$b1(x) = 3x\,(1 - x)^2$

$b2(x) = 3\,(1 - x)\,x^2$

$b3(x) = x^3$

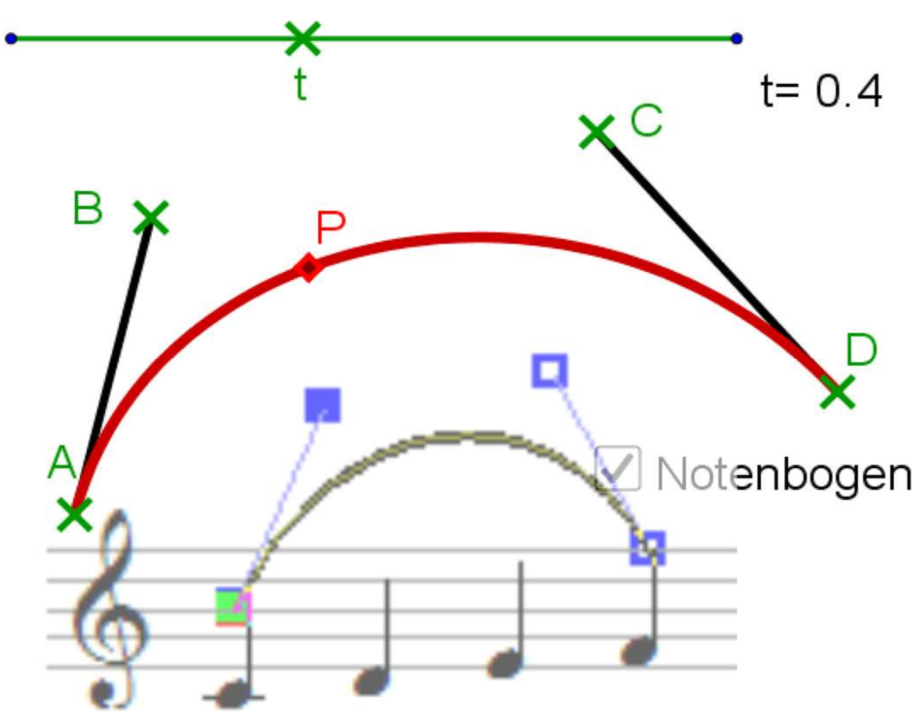
Polynome 3. Grades

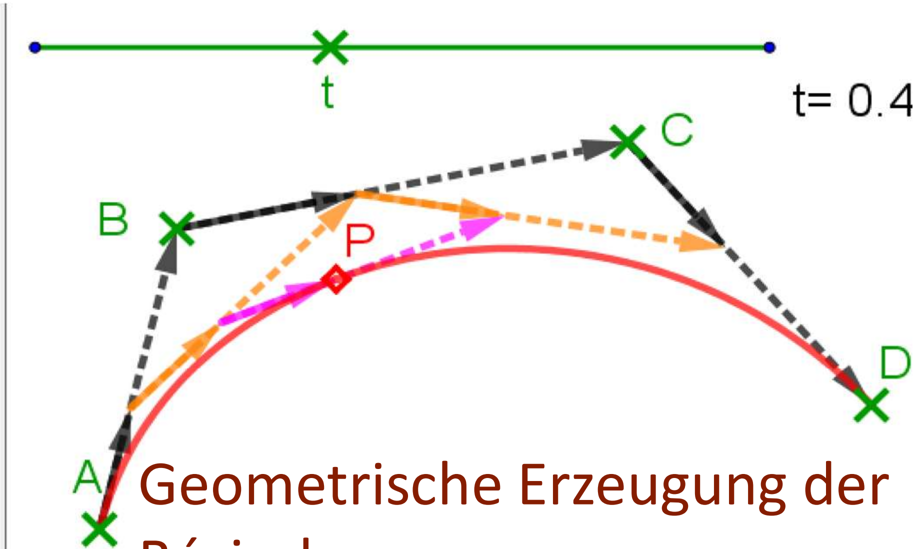
3 Nullstellen genau für x=0 und x=1

Sämtliche Möglichkeiten.

Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik

Die Bernsteinpolynome erzeugen Bézier-Splines.





Geometrische Erzeugung der Bézierkurve

Vektorieller Beweis ergibt die Bernsteinpolynome

Bézierkurve als Parameterkurve

$x(t)=A_x\, b_0(t)+B_x\, b_1(t)+C_x\, b_2(t)+D_x\, b_3(t)$

$y(t)=A_y\, b_0(t)+B_y\, b_1(t)+C_y\, b_2(t)+D_y\, b_3(t)$

Kurve(x(t),y(t),t,0,1)

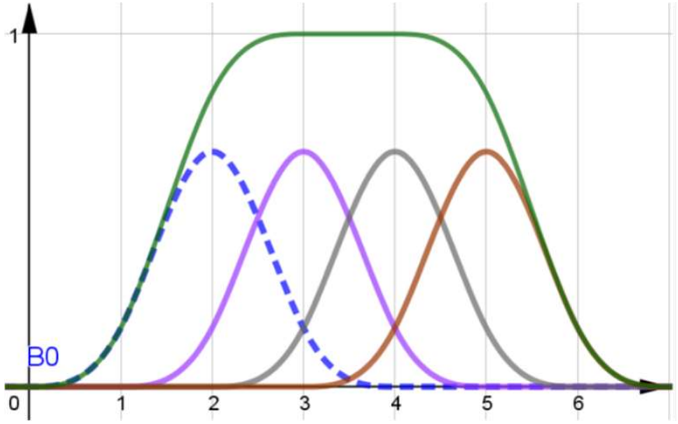
Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik

Weiterführende Spline-Konzepte:

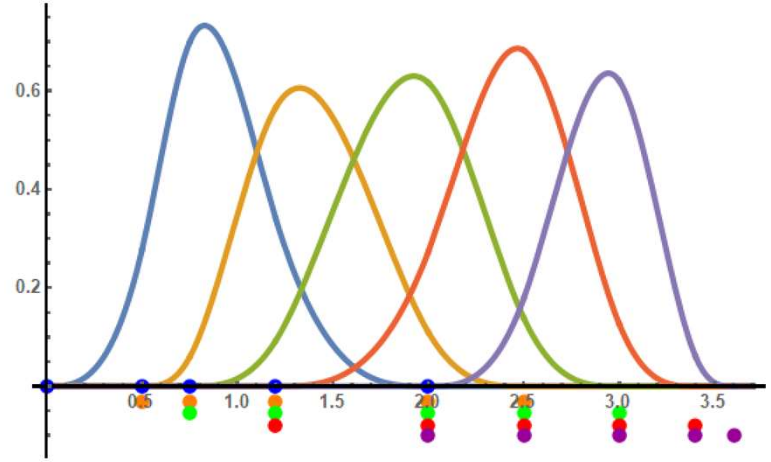
B-Splines und NURBS

Basis-Polynome

Summe 1



Intervallbreite 4

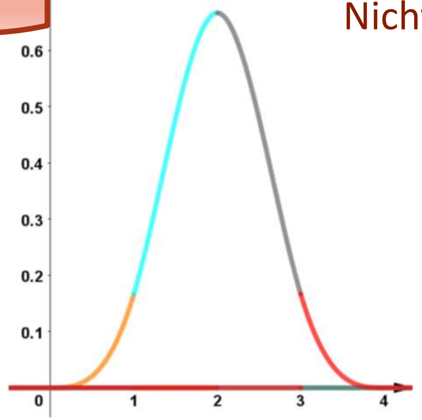


Sind das Polynome 4. Grades mit 2 doppelten Nullstellen?

Non Uniform Rational B-Splines

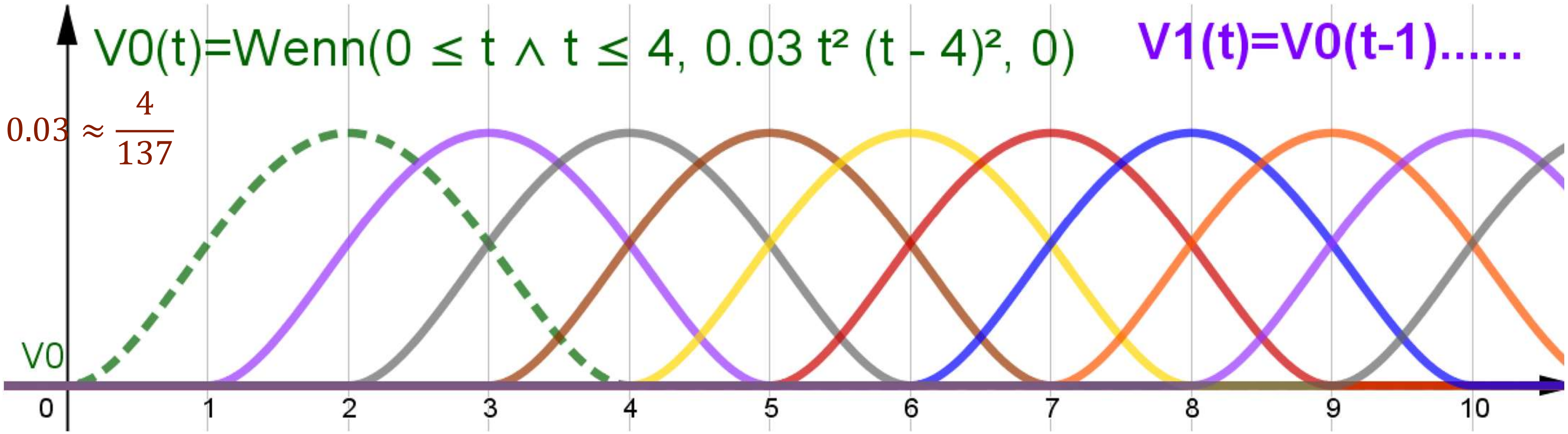
Nicht gleichförmige rationale B-Splines

LEIDER NEIN!
Die Grundfunktion
$B_0(t)$ ----------
besteht aus 4 Teilen



ABER:

Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik



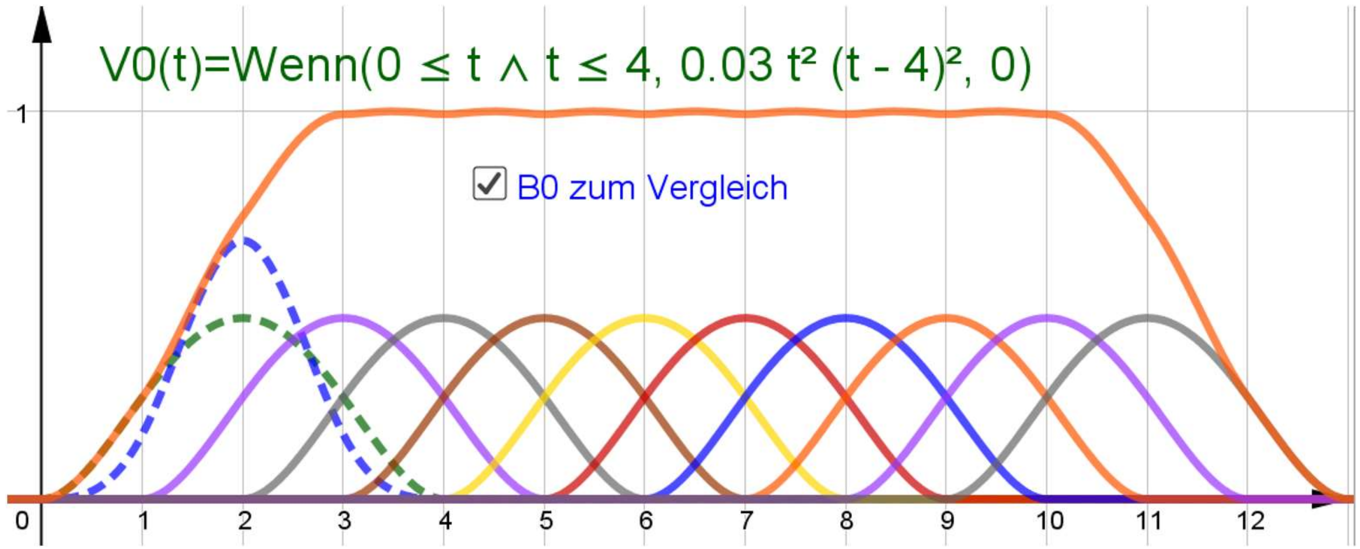
0

Summe 1,

ist das wahr?

LEIDER

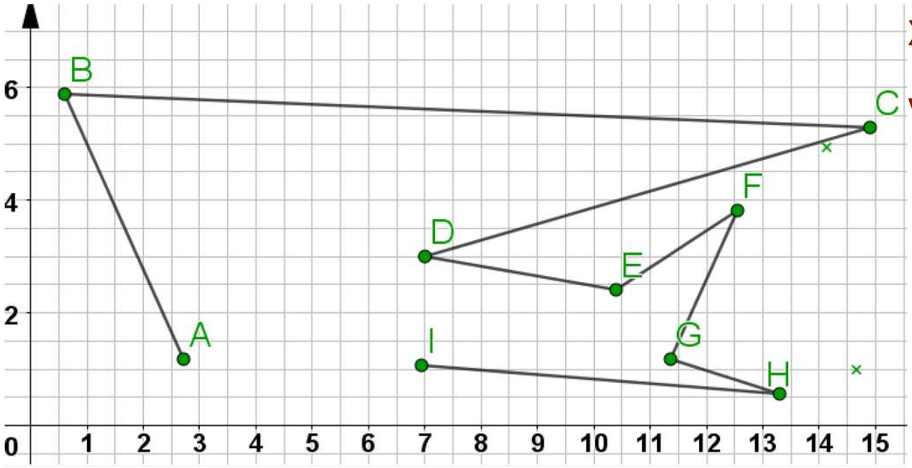
knapp vorbei!



evt.

B_0 hat Sattel-Nst, V_0 hat nur doppelte Nst.

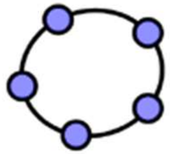
Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik



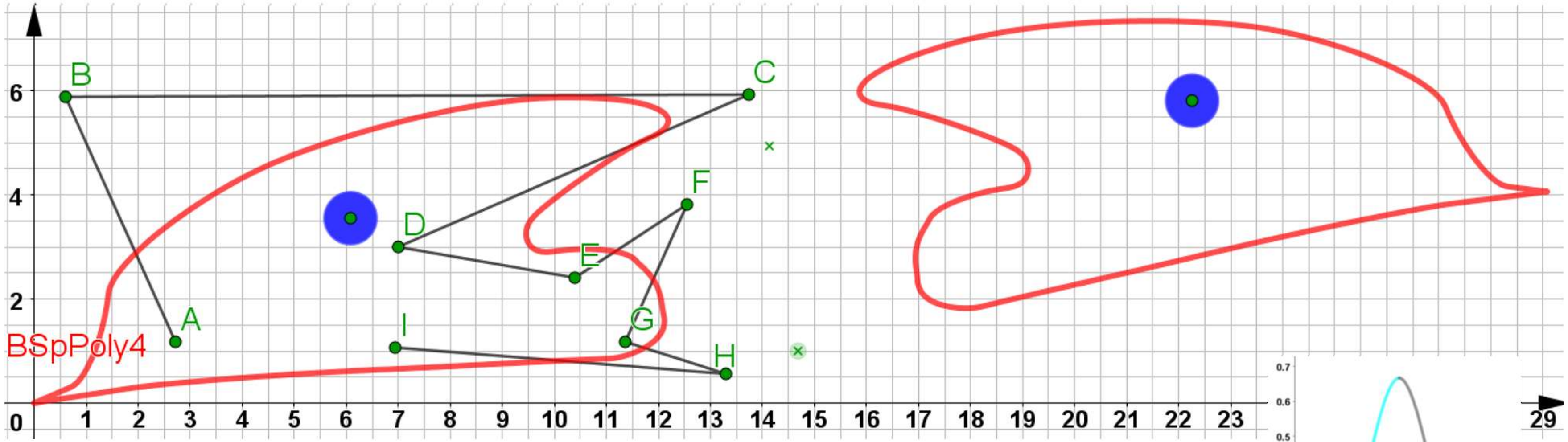
$x(t)=A_xV_0(t)+ B_xV_0(t-1)+ C_xV_0(t-2)+ \dots$

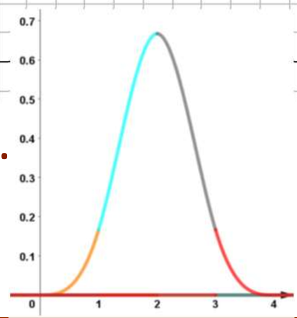
$y(t)=A_yV_0(t)+ B_yV_0(t-1)+ C_yV_0(t-2)+ \dots$

$\boxed{\text{Kurve}(x(t),y(t),t,0,13)}$



Karl +
Karlo

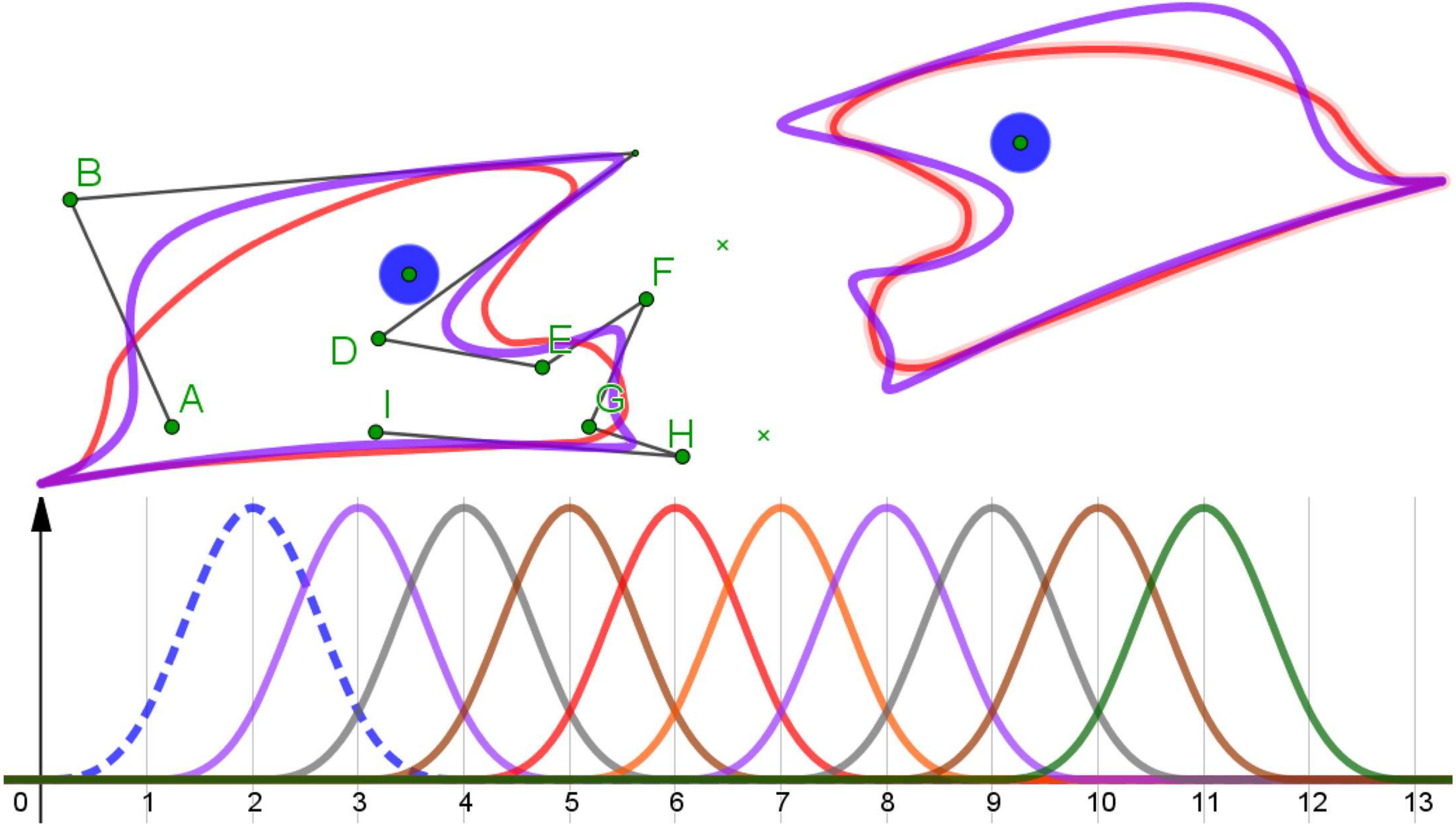




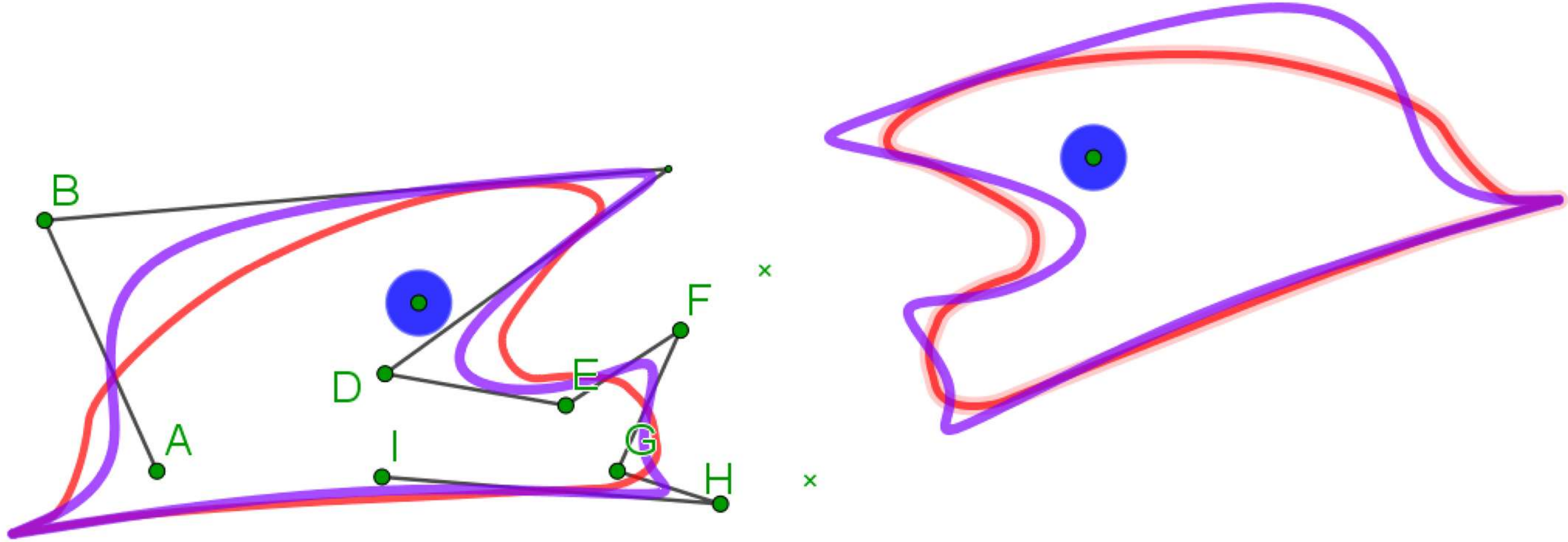
Basispolynome vom Grad 4 aber die Summe war nicht konstant 1.

B-Splines haben gestückelte Basispolynome vom Grad 3
und die Summe ist genau konstant 1.

Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik



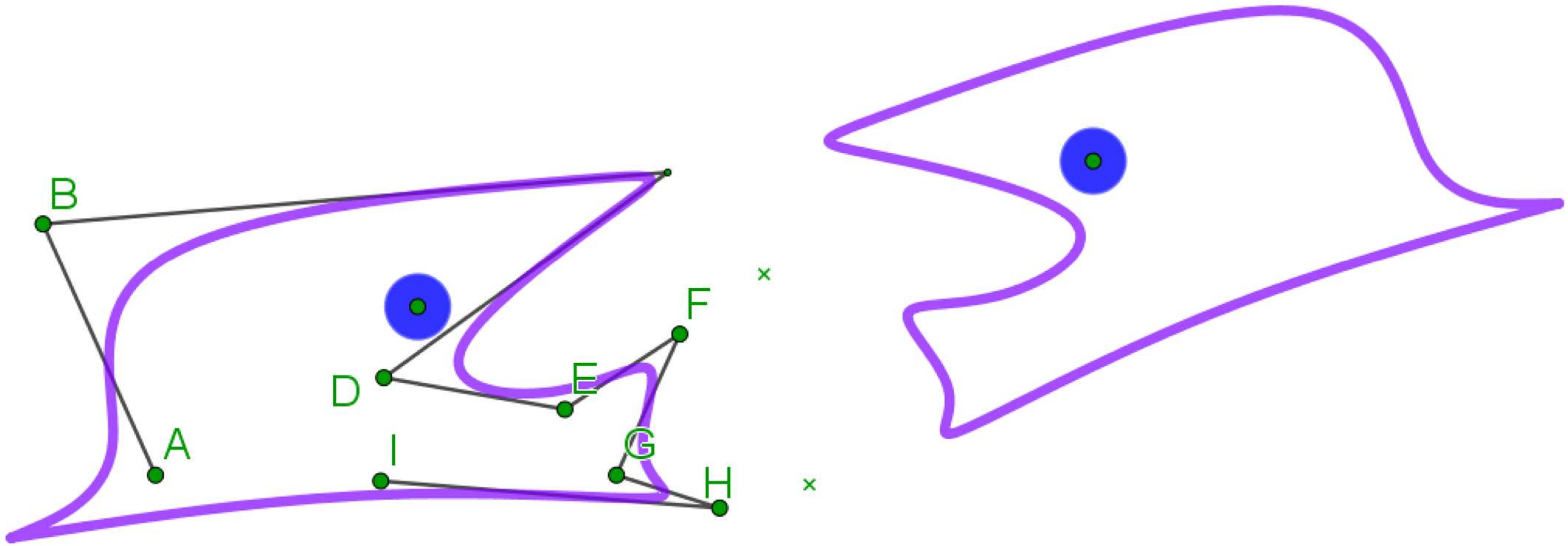
Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik

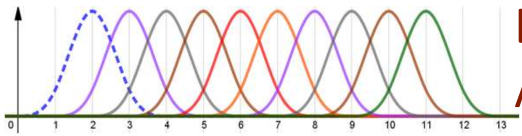


Der wahre B-Spline ist „glatter“ und reagiert feiner auf die Steuerpunkte.

Die Einfachversion mit Polynomen 4. Grades ist „ didaktische Erfindung“ und nicht so edel.

Vielfachheit der Nullstellen in der Numerik





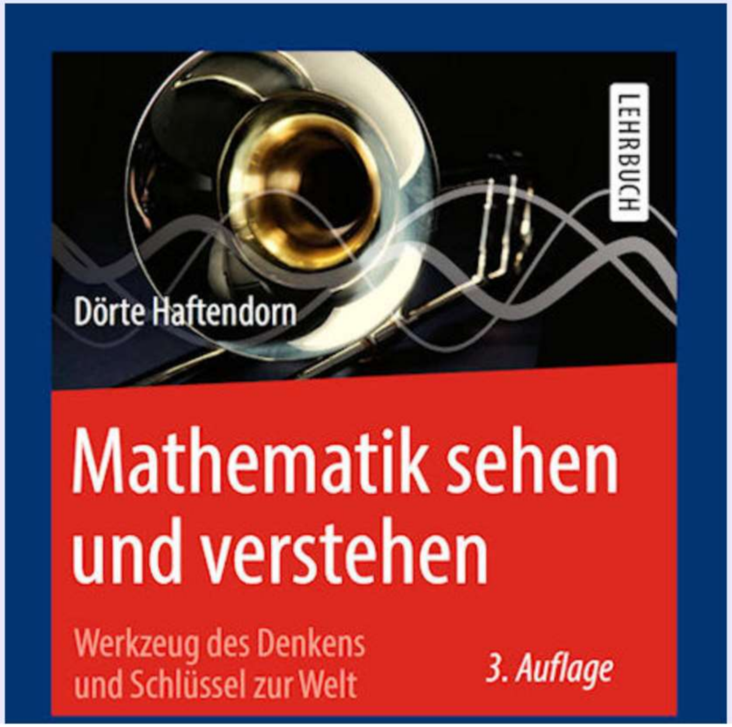
Diese B-Spline-Basispolynome vom Grad 3 sind gleich breit.
Alle „Knoten" haben den Abstand 4.

Bei den NURBS sind die Knoten in beliebigen Abständen. Ihre B-Spline-Basispolynome vom Grad 3 sind gewichtet, so dass weiterhin sind ihre Summe für jedes t gleich 1 ist.
Auch exakte Geometrie ist möglich.

NURBS sind die Grundlage für Computeranimationen, man kann sie ohne Aufwand geometrisch abbilden und bewegen.

Lesen Sie ausführlicher in den Büchern

Mathematik sehen und verstehen



Polynome in 6.1 bis 6.3

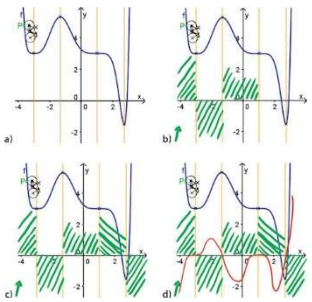
Höhere Mathematik sehen und verstehen

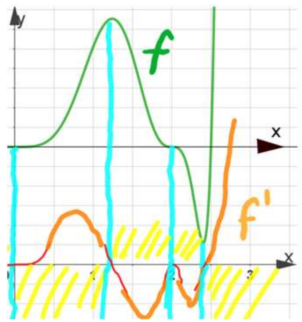
Splines+NURBS in 5.3 bis 5.4

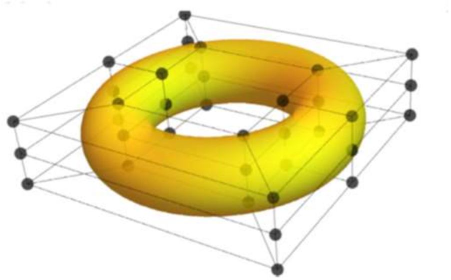
Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien finden Sie im Bereich Vorträge

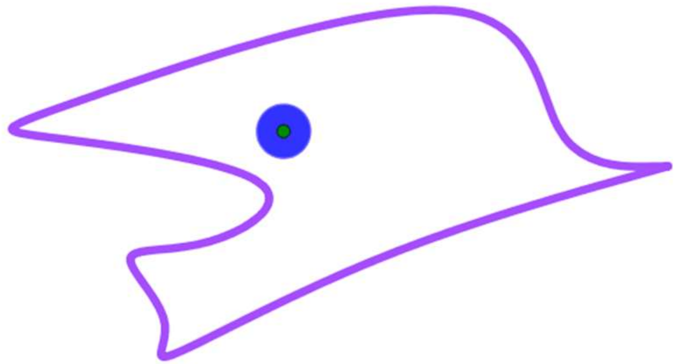
Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

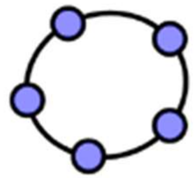
8. Juli 2021 Karlsruhe KIT/ZLBM











Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Die Präsentation und alle gezeigten GeoGebra-Dateien finden Sie im Bereich Vorträge