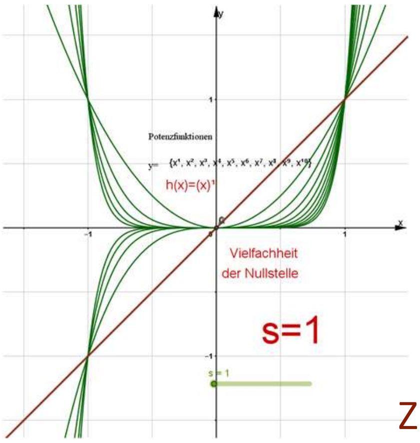
Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

März 2019 GDM Regensburg



Erst Graphen verstehen.

- Gesamtverlauf begreifen
- Felderabstreichen
- Vielfachheit beachten
- Qualitativen Graphen erzeugen

Dann stolz sein, dass man ohne Computer viel geschafft hat. Wahrhaftige Kurvendiskussion!

Zuletzt ggf. noch rechnen.

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 1

1

mehrfache Nullstellen, Vielfachheit

WAS WANN WOMIT WOZU WARUM

- Definition
- Von Hand Felderabstreichen
- Für qualitative Graphen
- Für Verstehen und Computer Besiegen
- Für Eigentätigkeit und Freude am Erfolg
- Um über Kurven wahrhaft zu diskutieren

Beispiele:

Polynome,

Trigon. Funktionen

Quotienten-Fkt

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 2

2

Was sind „mehrfache Nullstellen“?

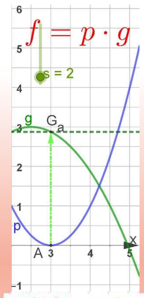
Definition

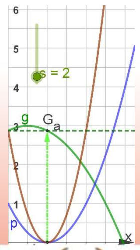
g stetig in a

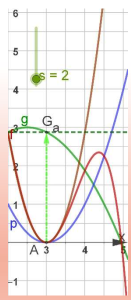
- Kann man eine Funktion schreiben als

$f(x) = (x-a)^s g(x)$ mit $g(a) \neq 0$ und $s > 0$,

dann hat f in a eine Nullstelle der Vielfachheit s.



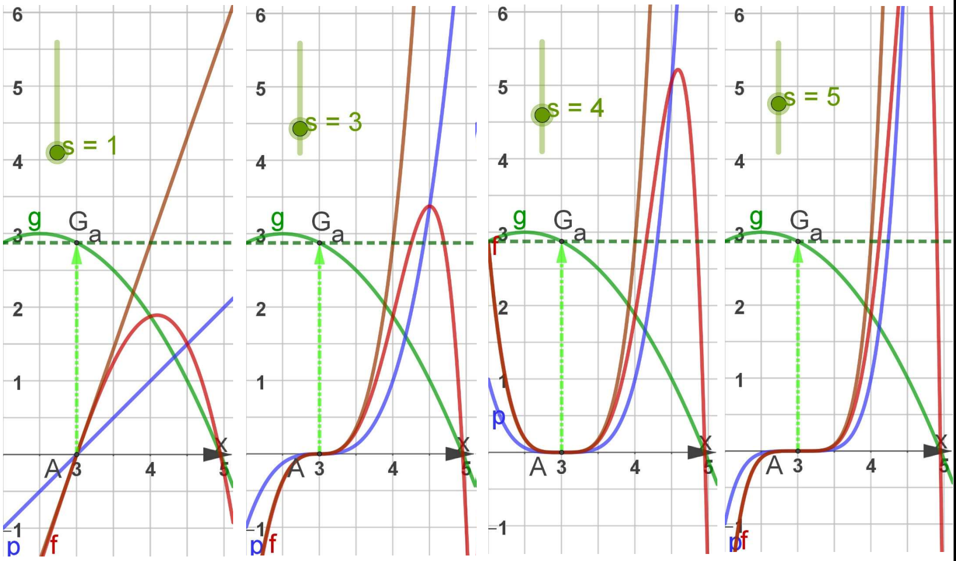




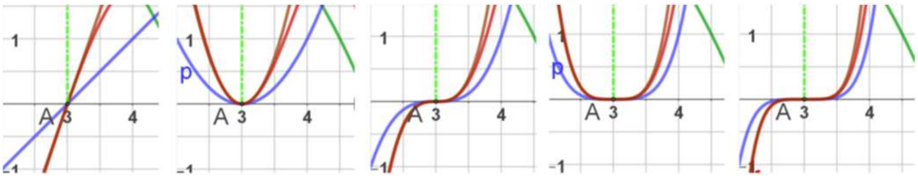
$ps(x) = p(x) \cdot g(a)$

$f(x) = (x-a)^s \cdot g(x)$

Variation der Vielfachheit s $g(a) > 0$



Wie sehen s-fache Nullstellen aus?



- s=1 einfacher Nulldurchgang
- s=2 parabelförmige Berührung

Topf fällt um!

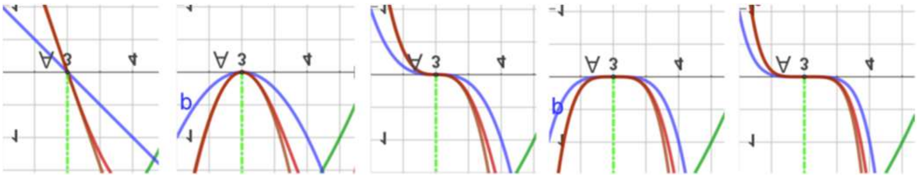
- s=3 gewöhnlicher Sattel

- s gerade → topfförmige Berührnullstelle

Topf kann stehen

- s ungerade → sattelförmiger Nulldurchgang

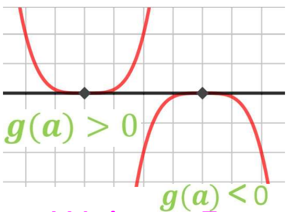
- **Je größer s ist, desto breiter sind Töpfe und Sättel**



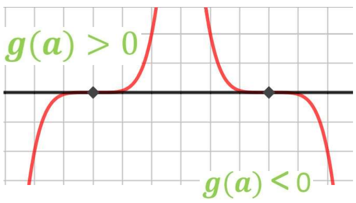
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 5

5

Berührung von oben oder unten?



Nulldurchgang steigend oder fallend?



Weitere Entscheidungshilfen:

Polynome,

die durch Linearfaktoren gegeben sind

$$f(x) = t(x - x_1)^{s_1}(x - x_2)^{s_2} \ldots (x - x_n)^{s_n}$$

1. **Grad** des Polynoms = Summe der Vielfachheiten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 6

6

Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$$f(x) = t(x-x_1)^{s_1}(x-x_2)^{s_2}\ldots(x-x_n)^{s_n}$$

1. **Grad** des Polynoms = $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$

Man stellt sich alles aufgelöst vor!

2. **Gesamtverlauf,** Verlauf außerhalb aller Nullstellen:

Grad ist gerade Zahl — Grad ist ungerade Zahl

$t>0$ $t<0$ $t>0$ $t<0$

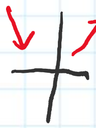
7

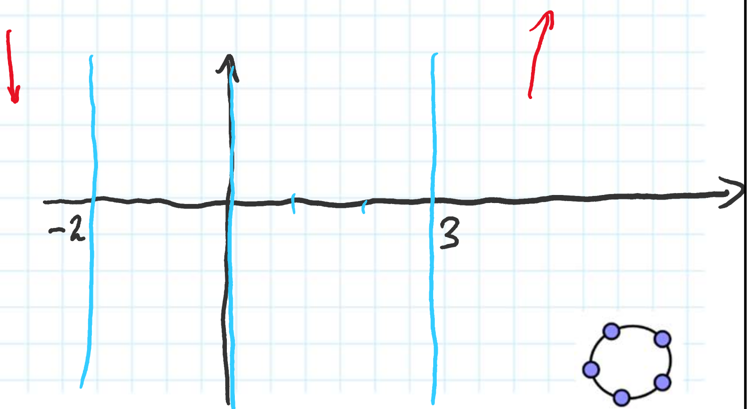
Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$f(x) = t(x+2)x^3(x-3)^2$ Grad $\overset{1+3+2}{=} 6$

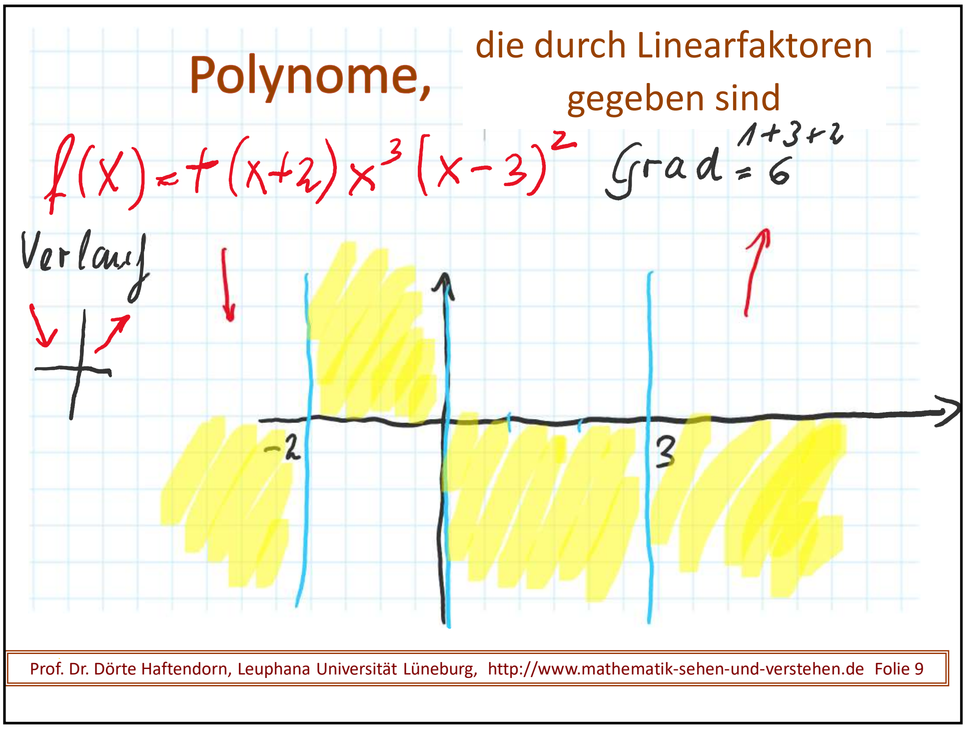
$t>0$

Verlauf

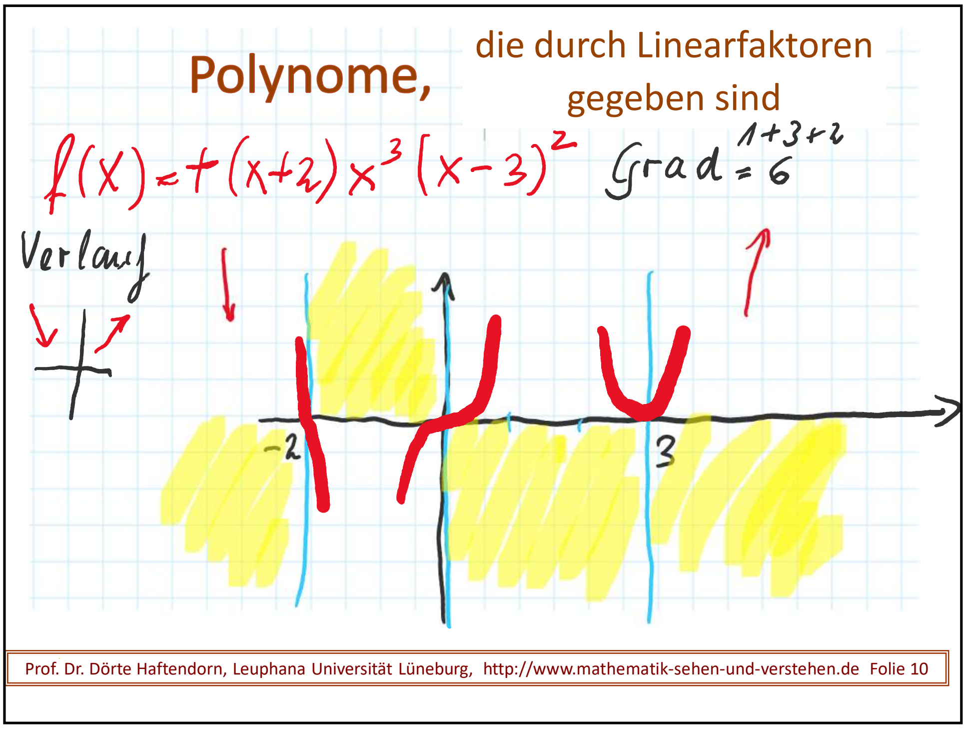




8


Polynome,
die durch Linearfaktoren gegeben sind
$f(x) = +(x+2)x^3(x-3)^2$
Grad $\overset{1+3+2}{=}$ 6
Verlauf
-2
3
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 9

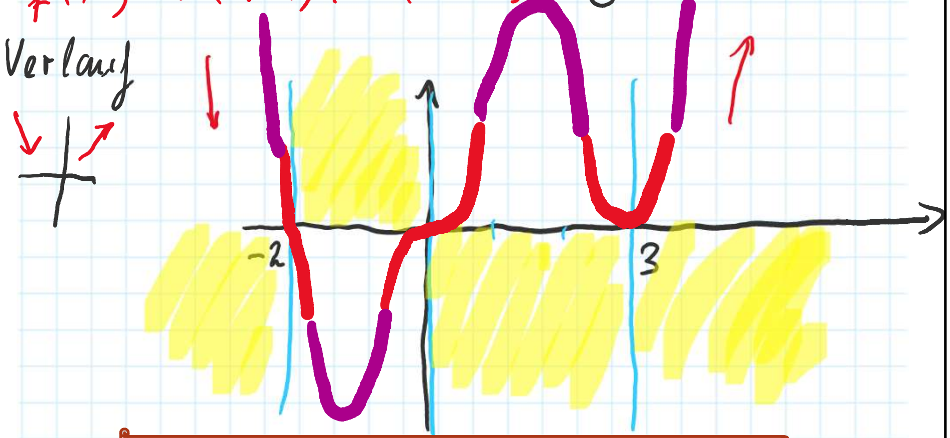
9


Polynome,
die durch Linearfaktoren gegeben sind
$f(x) = +(x+2)x^3(x-3)^2$
Grad $\overset{1+3+2}{=}$ 6
Verlauf
-2
3
Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 10

10

Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

$f(x) = +(x+2)\,x^3\,(x-3)^2$ Grad $\overset{1+3+2}{=} 6$



Felderabstreichen, qualitative Graphen erzeugen

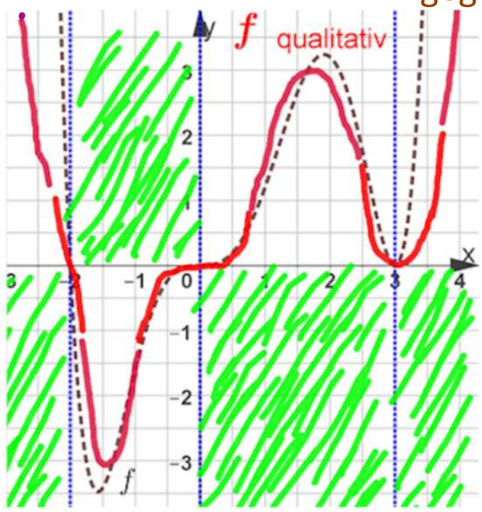
11

Polynome, die durch Linearfaktoren gegeben sind

Grad
1+3+2
=6

Vor-
zeichen
+

Gesamt-
verlauf



Felderabstreichen, qualitative Graphen erzeugen

Vergleichen!!!

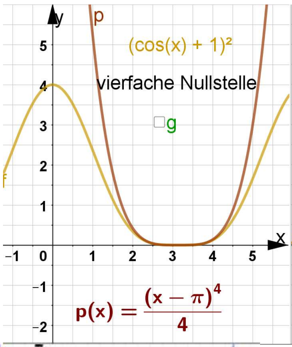
Was muss stimmen?

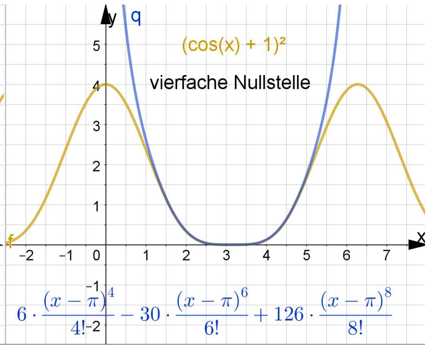
Was ist egal?

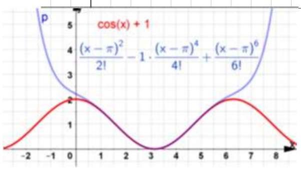
Vielfachheit **2 bzw. 3** versus **4 bzw. 5** oder höher

12

Vielfachheit der Nullstellen
auch bei beliebigen Funktionen nützlich







Bei π ist und bleibt eine vierfache Nullstelle, egal wie weit ich die Taylornäherung treibe.

Entsprechend haben Sinus und Kosinus „Hügel und Täler“ vom Grad 2.

13

Ableitungen reduzieren die Vielfachheit um 1

Beweis

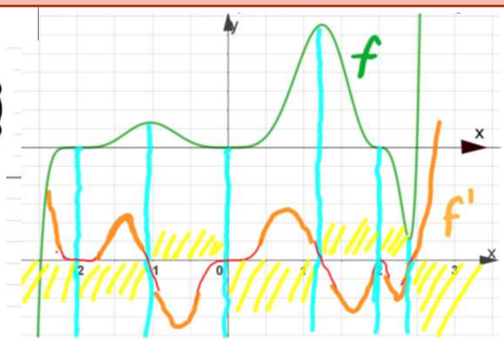
1	f(x):=(x-a)^s g(x) $\rightarrow \mathbf{f(x) := g(x)\,(-a+x)^s}$
2	f'(x) $\rightarrow \mathbf{(-a+x)^s\, g'(x) + s\, g(x)\,(-a+x)^{s-1}}$
3	f'(x)=(-a+x)^(s-1)*gg(x) $\rightarrow \mathbf{(-a+x)^s\, g'(x) + s\, g(x)\,(-a+x)^{s-1} = gg(x)\,(-a+x)^{s-1}}$
4	gg(x):=(-a+x)g'(x)+s g(x) $\rightarrow \mathbf{gg(x) := s\, g(x) + g'(x)\,(-a+x)}$
5	gg(a) $\rightarrow \mathbf{s\, g(a)}$ $\neq 0$

Polynomgleichung finden

- Den grünen Graphen f auf Karopapier geben.
- Welche Gleichung hat er etwa?

$$f(x) = t(x+2)^5 x^4 (x-2)^3 (x-2.5)$$

- **Einen qualitativen Graphen für die Ableitung f‘ mit Felderabstreichen herleiten.**

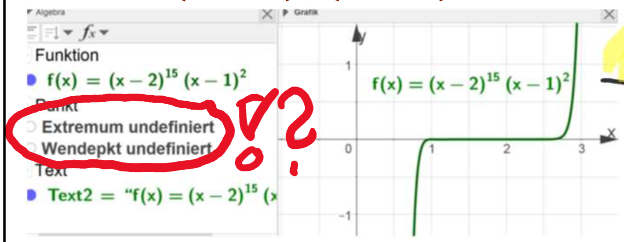


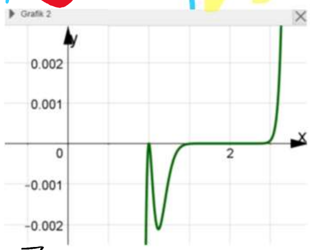
hilfsmittelfrei

14

Platt oder nicht platt?

f(x)=$(x-1)^2(x-2)^{15}$





Graphenzeichnen mit Computer lohnt allenfalls am Ende!

$$f'(x) = 15(x-2)^{14}(x-1)^2 + (x-2)^{15}\cdot 2(x-1)$$
$$= (x-2)^{14}(x-1)\cdot[15(x-1)+2(x-2)]$$
$$= (\quad)(\quad)[17x-19]$$

$f\left(\frac{19}{17}\right) = -0{,}002\ldots$

Das Extremum findet man sogar von Hand

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 15

15

CAS - platt-nicht-platt.ggb

1 Platt oder nicht platt?

2 f(x)
→ $(x-1)^2(x-2)^{15}$

3 f'(x)
→ $17x^{16} - 512x^{15} + 7215x^{14}$ –

4 Löse(f'(x)=0)
→ $\left\{x=1, x=\frac{19}{17}, x=2\right\}$

5 Faktoren(f'(x))
→ $\begin{pmatrix} x-2 & 14 \\ x-1 & 1 \\ 17x-19 & 1 \end{pmatrix}$

6 f(19/17)
≈ -0.00212

7 Faktoren(f(x))
→ $\begin{pmatrix} x-2 & 15 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$

Platt oder nicht platt?

f(x)=$(x-1)^2(x-2)^{15}$

Zum Rechnen so nicht zu gebrauchen

Aber GeoGebra CAS kommt damit zurecht.

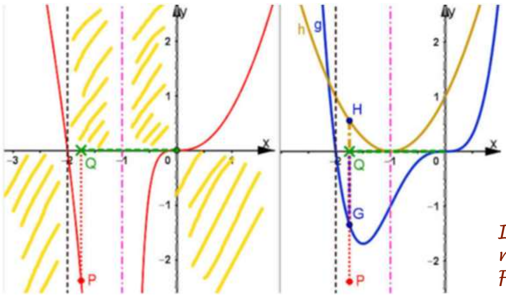
Ableiten reduziert jede Vielfachheit um 1.

Ohne das Konzept der Vielfachheit kommt die Wahrheit wohl kaum ans Licht!

Prof. Dr. Dörte Haftendorn, Leuphana Universität Lüneburg, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de Folie 16

16

Quotienten von Polynomen



$$f(x) = \frac{(x+2)x^3}{(x+1)^2}$$

$$g(x) = (x+2)\ x^3$$

$$h(x) = (x+1)^2$$

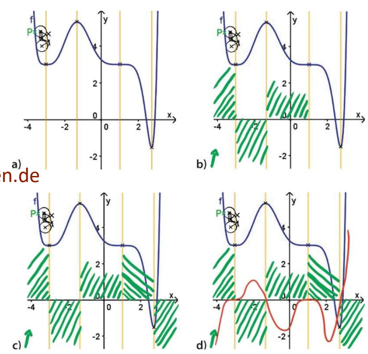
In GeoGebra nebeneinander in zwei Fenstern

- Zähler und Nenner sind sofort vertraut, da die Vielfachheiten klar sind
- Für alle Nullstellen Feldergrenzen zeichnen
- Felderabstreichen
- Falls alle Nst. ungleich:
  - Nenner-Nst. erzeugen Pole ohne/mit ZW
  - Zähler-Nst. behalten ihre Vielfachheit
  - Asymptoten: Grad = Max(Zählergrad-Nennergrad, null)
- Bei übereinstimmenden Nullstellen nimmt man die stetige Fortsetzung

Hilfsmittelfrei
Ohne Rechnungen
möglich

Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

www.kurven-erkunden-und-verstehen.de



Hier wie dort:
Alle *.ggb und die
Bilder frei verfügbar

3. Auflage
Seit März 2019

21 S. dazu: Keltische Knoten zeichnen, Polynome im Affenkasten, Fkt.-Quotienten

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit