Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Die geheime Macht der mehrfachen Nullstellen

Ist ein Polynom durch Linearfaktoren und deren Potenzen gegeben, so kann man von Hand mit der Methode „Felder abstreichen“ qualitative Graphen erzeugen. In der Nähe einer s-fachen Nullstelle verhält sich das Polynom nämlich wie die Potenzfunktion mit dem Term x^s. Dabei ist nichts zu rechnen, aber der Lösungsprozess ermöglicht Eigentätigkeit und Verstehen. Die Graphen aus Taschenrechnern sind dabei nicht sonderlich hilfreich, da bei Polynomen hohen Grades die Skalierungen nicht passen. Das Vorgehen kann sehr schön auf andere Funktionstypen und auch auf Quotienten aus Polynomen erweitert werden. Auch qualitative Ableitungsgraphen ergeben sich zeichnerisch. Die Lernenden können sich gegenseitig Aufgaben stellen, mit der Zoomfunktion des Computers (GeoGebra, Smartphone o. ä. oder einfachem GTR) ihre Graphen prüfen, stolz sein, wenn sie alles Wesentliche ohne Computer eigenständig herausgefunden haben. Argumentieren wird unterstützt, es ergibt sich eine Kurvendiskussion, die ihren Namen verdient. Letztlich ist das Vorgehen auch für Klausurteile ohne Hilfsmittel in besonderer Weise geeignet.

Mathematische Grundlagen

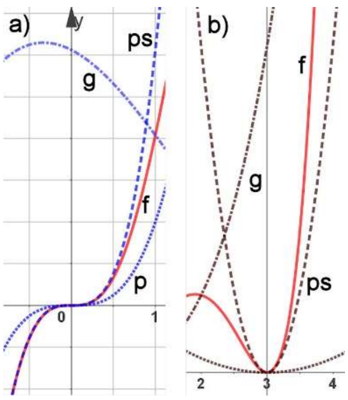

Abbildung 1:Näherungen an den Nullstellen

Definition: Kann man eine Funktion schreiben als $f(x) = (x-a)^s g(x)$ mit $g(a) \neq 0, s \in \mathbb{N}$ dann heißt a **Nullstelle der Vielfachheit s** von f.

In Abb. 1 wird die Potenzfunktion mit p bezeichnet. Sie wird gestreckt zu $ps(x) = (x-a)^s g(a)$ (gestrichelt) und ps ist eine Näherung für f in der Nähe der Nullstelle a. In Abb. 1 ist g mit Strichpunkten zu sehen, $g(a)$ kann im konkreten Fall abgelesen werden. Der Graph von f ist durchgezogen dargestellt. Als Vertiefung könnte man z.B. bei b) überlegen, dass g an der Stelle a steigt und daher die Näherungskurve ps den Graphen von f in der gezeigten Weise durchdringen muss. Eine bessere Näherung als ps könnte man erreichen, wenn man von der Taylorentwicklung T von g weitere Glieder nähme, denn es gilt $T\big((x-a)^s g(x)\big) = (x-a)^s T\big(g(x)\big)$.

Einen geraden Nulldurchgang erhält man für $s = 1$, eine parabelförmige Berührung für $s = 2$ und einen einfachen Sattel für $s = 3$. Für wachsende gerade s werden die Berührungen immer topfförmiger, für ungerade s die Sättel immer breiter.

Polynome aus Linearfaktoren

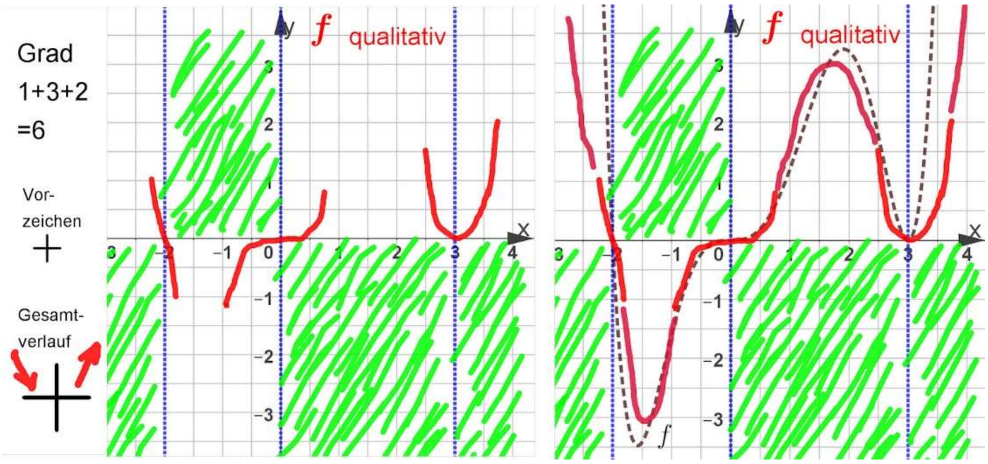

Abbildung 2 Vorüberlegungen; Felderabstreichen und Verhalten an den Nullstellen; qualitativer Graph, zum Vergleich mit Computergraph

In Abb. 1 ist gegeben: $f(x) = t\ (x+2)x^3(x-3)^2$. Für die Vorüberlegungen und den qualitativen Graphen ist der Streckfaktor $t = 0.1$ unwichtig. Er wird als positiv verabredet, ein negatives Vorzeichen würde ausdrücklich angegeben. Wenn der Gesamtverlauf entschieden ist, können durch Senkrechten an den Nullstellen Streifen abgeteilt wenden, bei denen die Hälfte schraffiert wird, in der der gesuchte Graph *nicht* verlaufen kann. Die Entscheidung wird durch die Betrachtung von *gerade* oder *ungerade* für die Exponenten gefällt. Nun kann der Nulldurchgang, bzw. die Berührung gezeichnet werden, wobei für *höhere Exponenten* ein deutlich „plattes“ Stück auf der x-Achse entstehen soll, wie es die Potenzfunktionen zeigen. Fügt man die entstandenen Teilstücke ästhetisch ansprechend aneinander, entsteht der qualitative Graph. Von letzterem werden keine genaueren Ordinaten gefordert, somit gibt es keinen Rechenbedarf und das Vorgehen mit **Felderabstreichen** eignet sich auch für die Arbeit von Hand auf Papier.

In der Lernphase aber ist das Zeichnen auf dem Bildschirm oder dem Whiteboard in einem DMS wie GeoGebra sinnvoll, da dann der Vergleich mit dem Computergraphen von f erfolgen kann. So können Lernende Sicherheit gewinnen und stolz sein, dass sie so viel verstanden haben.

Qualitative Graphen sind Computergraphen überlegen

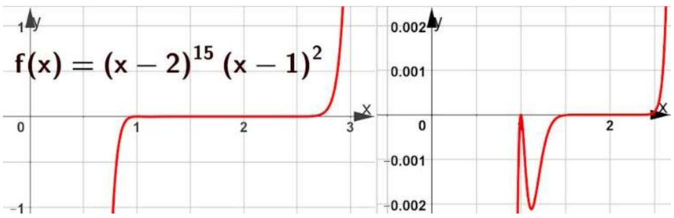

Abbildung 3: Der Computer zeigt eine platte Treppe, der qualitative Graph findet alles, das man dann (rechts) durch Zoom anzeigen kann.

Polynome haben niemals Intervalle der x-Achse in ihrem Graphen. Mindestens das muss man verstanden haben, um nach den beiden Extrema zu suchen, die nach dem Felderabstreichen in diesem Beispiel sicher vorhanden sind. Also lohnt sich der qualitative Graph. Wer das Ableiten nach der Produktregel beherrscht, findet $f'(x) = (x-2)^{14}(x-1)(17x-19)$ und dann das Extremum im vierten Quadranten $\left(\frac{19}{17}, -0.0021\right)$.

Bemerkenswert ist, dass z.B. GeoGebra, das Buttons für Extrema und Wendepunkte hat, in diesen Fall *Extremum undefiniert*, *Wendepunkt undefiniert* meldet. Dies ist ein schönes Beispiel dafür, dass die Computerbedienung nicht das *Mathematikverständnis* ersetzen kann.

Nullstellen-Vielfachheit bei beliebigen Funktionen

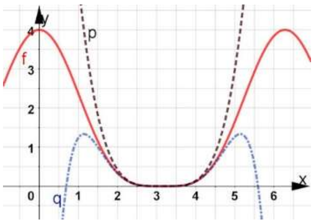

Abbildung 4: Verwandte des Kosinus mit 4-facher Nullstelle

Der Begriff der Vielfachheit von Nullstellen trägt auch für Funktionen, die keine Polynome sind. In Abb. 4 ist $f(x) = (\cos(x)+1)^2$ (durchgezogen) dargestellt. In Lehrzusammenhängen, in denen man die Taylor-Formel nicht zur Verfügung hat, kann man $p(x) = \frac{1}{b}(x-\pi)^s$ mit Schiebereglern für s und b eintragen. Schnell stellt man experimentell fest, dass ausschließlich $s = 4$ passt. Damit hat f eine **vierfache Nullstelle**. Dagegen ergibt sich b nicht ganz so eindeutig bei 4 oder 5. Betrachtet man $Taylor(f(x), x, \pi, 6) = \frac{1}{4}(x-\pi)^4 - \frac{1}{24}(x-\pi)^6$, so bestätigt sich das Obige mit $b = 4$ (in Abb. 4 gestrichelt) und die mit Strichpunkten eingezeichnete Taylor-Näherung vom Grad 6 hat ebenfalls eine vierfache Nullstelle, denn man kann den Term $(x-\pi)^4$ ausklammern und keinen Faktor höheren Grades.

Ableitungen durch Felderabstreichen

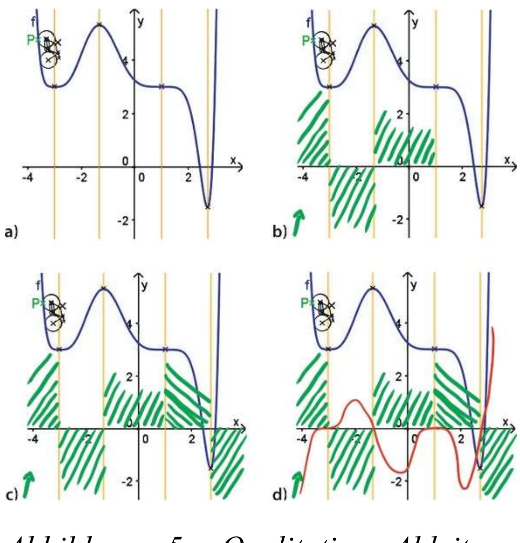

Abbildung 5: Qualitative Ableitung durch Felderabstreichen, durch das Fahrrad kann steigen/fallen gut erfasst werden. (Fahrrad von D.Riebesehl)

Die Ausgangsfunktion ist in Abb. 5 nach oben verschoben, um die Phänomene zu trennen. Man kann sich auch bei $y = b$ eine weitere x-Achse vorstellen. Dann gilt für $s > 1$, dass eine ***s*-fache Nullstelle von $\boldsymbol{f}$** (bzw. s-fache Berührstelle von f einer Geraden $y = b$) beim Ableiten in eine **$(\boldsymbol{s-1})$-fache Nullstelle von $\boldsymbol{f'}$** übergeht.

Dies zeigt $f'(x) = ((x-a)^s g(x))' = (x-a)^{s-1}G(x)$ mit $G(x) = sg(x) + (x-a)g'(x)$ und daher folgt (für „freundliche“ g) nun $G(a) = sg(a) \neq 0$.

Das Vorgehen von Hand wird in Abb. 5 deutlich. Gegeben ist ein Graph, dessen Funktionsgleichung nicht bekannt sein muss. An den für die Ableitung relevanten Stellen schneiden Senkrechten die x-Achse. Für fallende Kurvenstücke von f wird in der oberen Halbebene schraffiert, für steigende in der unteren Halbebene. Für parabelförmige Extrema ergeben sich schräge Nulldurchgänge, Extrema von der Vielfachheit s erzeugen Sättel der Vielfachheit $(s-1)$. Entsprechend gehören zu Sätteln berührende Extrema mit der um 1 reduzierten Vielfachheit. So führt die Methode **Felderabstreichen** zu einem **qualitativen Graphen der Ableitung**. Für Prüfungen ist es pragmatisch zu fordern, das sich die Vielfachheit 2 von 4, 6,… unterscheidet und 3 von 5, 7,… So eignet sich auch diese Fragestellung für hilfsmittelfreie Prüfungsteile.

Quotienten von Polynomen

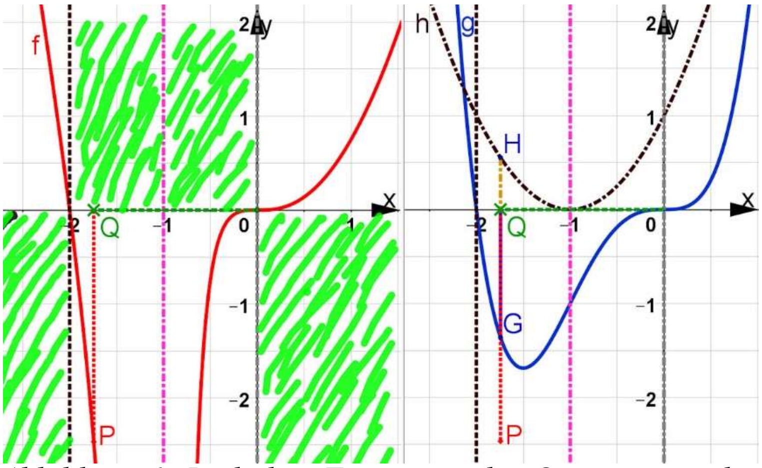

Abbildung 6: Im linken Fenster ist der Quotient aus den zwei Polynomen des rechten Fensters

In Abb. 6 geht es um $f(x)=\frac{(x+2)x^3}{(x+1)^2}$, also eine gebrochen rationale Funktion. Im rechten Fenster sind die Zählerfunktion g und die Nennerfunktion h eingetragen. In dem damit gekoppelten linken Fenster wird ein Graph für f erzeugt. Einerseits geht das **interaktiv**, indem Punkt Q rechts gezogen wird und an jeder Stelle aus den Ordinaten von G und H der Wert für P berechnet wird. Die Ortskurve von P kann dann links angezeigt werden. Andererseits kann man auch hier von Hand mit der Methode **Felderabstreichen** arbeiten. Der Typ der Zählernullstellen setzt auch für f durch, da dort h nur einen Streckfaktor liefert. Die Nennernullstellen bilden Pole, ist s gerade, sind die Pole ohne Zeichenwechsel, wie es hier ist.

Es ist ein Jammer, dass Quotientenfunktionen nur in trivialen Fällen im Unterricht vorkommen, hier wäre ein Feld für lohnendes Diskutieren und Argumentieren über Kurven. Dies - und auch die anderen angesprochenen Aspekte dieses Aufsatzes - führt Haftendorn (2019) deutlicher aus.

Literatur

Haftendorn, Dörte (2019), *Mathematik sehen und verstehen*, 3. Aufl., Heidelberg: Springer Spektrum, http://www.mathematik-sehen-und-verstehen.de