Höhere Mathematik sehen und verstehen,
Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021

Trisektrix mit rationalen Béziersplines

Bernsteinpolynome

```
In[ ]:= b[0, t_] := (1 - t)^3;
        b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;
        b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t);
        b[3, t_] := t^3
```

Herleitung einer Parameterdarst. für Trisektrix

Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch die Singularität schneidet die Trisektrix.
Die Steigung t diese Geraden eignet sich als Parameter.

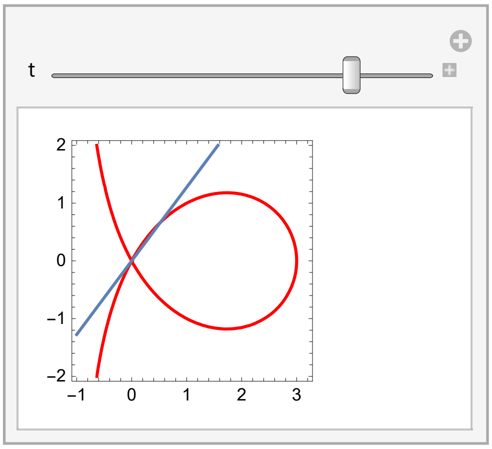
- Trisektrix $(a + x)\, y^2 = (3a - x)\, x^2$ Kurvenbuch Seite 64

```
In[ ]:= trisektrix = ContourPlot[{(1 + x) y^2 - (3 - x) x^2 == 0
                     Konturgraphik
          }, {x, -1, 3.2}, {y, -2, 2}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
                                       Seitenverhältnis  Konturenstil     rot
```

In[∘]:= Manipulate[Show[trisektrix, Plot[t x, {x, -1, 3.2}, PlotRange → {-2, 2}]],
{t, -2, 2}]

manipuliere, zeige an, stelle Funktion graphisch dar, Koordinatenbereich der Graphik

Out[∘]=



In[∘]:= Solve[{(a + x) y² - (3 a - x) x² == 0, y == t x}, {x, y}]

löse

Out[∘]= $\left\{\{x \to 0, y \to 0\}, \left\{x \to \frac{3a - a t^2}{1 + t^2}, y \to \frac{3 a t - a t^3}{1 + t^2}\right\}\right\}$

Definition rationaler Bézierspline-Basis

In[∘]:= Rw =.

In[∘]:= Rw[i_, t_] := $\frac{\texttt{ww[i] b[i, t]}}{\texttt{Sum[ww[j] b[j, t], \{j, 0, 3\}]}}$;
Rw[i, t]

Out[∘]= $(b[i, t]\, ww[i]) \Big/ \left((1 - t)^3\, ww[0] + 3\,(1 - t)^2\, t\, ww[1] + 3\,(1 - t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]\right)$

Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

$\left\{x \to \frac{3a - a t^2}{1 + t^2}, y \to \frac{3 a t - a t^3}{1 + t^2}\right\}$ (*Trisektrix, Schlaufenbreite 3a*)

Out[∘]= $\left\{x \to \frac{3a - a t^2}{1 + t^2}, y \to \frac{3 a t - a t^3}{1 + t^2}\right\}$

Die Gewichte müssen aus dem Nenner bestimmt werden

In[∘]:= nenner = Sum[ww[j] b[j, t], {j, 0, 3}]

summiere

Out[∘]= $(1 - t)^3\, ww[0] + 3\,(1 - t)^2\, t\, ww[1] + 3\,(1 - t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]$

In[∘]:=
```
CoLi = CoefficientList[nenner, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[∘]= {ww[0], -3 ww[0] + 3 ww[1], 3 ww[0] - 6 ww[1] + 3 ww[2], -ww[0] + 3 ww[1] - 3 ww[2] + ww[3]}

In[∘]:=
```
Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
```
löse

Out[∘]= $\left\{\left\{ww[0] \to 1,\ ww[1] \to 1,\ ww[2] \to \frac{4}{3},\ ww[3] \to 2\right\}\right\}$

Also sind die Gewichte (übrigens ebenso wie für den Kreis)

In[∘]:= $W = \left\{1, 1, \frac{4}{3}, 2\right\};$

In[∘]:=
```
w[i_] := W[[i + 1]]
```

In[∘]:=
```
nenner = Sum[w[i] b[i, t], {i, 0, 3}] // Simplify  (* wie erwartet*)
```
summiere vereinfache

Out[∘]= $1 + t^2$

Vergleich der Bernsteinpolynome mit der rationalen Version

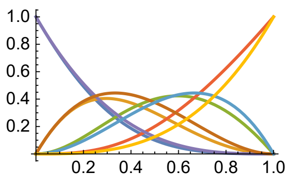
Verwendung der Gewichte auch im Zähler für die Trisektrix

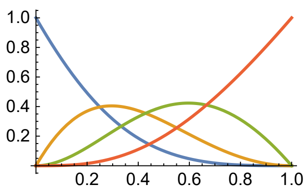
In[∘]:= $R[i\_, t\_] := \frac{w[i]\ b[i, t]}{nenner}$

In[∘]:=
```
{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}
```

Out[∘]= $\left\{\frac{(1-t)^3}{1+t^2}, \frac{3\,(1-t)^2\,t}{1+t^2}, \frac{4\,(1-t)\,t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t^3}{1+t^2}\right\}$

In[∘]:=
```
alle =
 Plot[{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t], b[0, t], b[1, t], b[2, t], b[3, t]}, {t, 0, 1}]
```
stelle Funktion graphisch dar
```
nurRat = Plot[{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}, {t, 0, 1}]
```
stelle Funktion graphisch dar

Out[∘]=


Out[∘]=


Steuerpunkte für die Trisektrix

Punkte

In[∘]:=
```
P = {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
```
Out[∘]= {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}

Trisektrix Parameterdarstellung

In[∘]:= $x[t\_] := \frac{a\,(3-t^2)}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{a\,t\,(3-t^2)}{(1+t^2)}$

Nenner wie beim Kreis führt zu

Berechnung der Steuerpunkte

Berechnung x-Koordinaten

In[∘]:=
```
xwerte = Axx Rw[0, t] + Bxx Rw[1, t] + Cxx Rw[2, t] + Dxx Rw[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[∘]= $-Axx\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,Bxx\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,Cxx - 2\,Cxx\,t + Dxx\,t)\right)$

In[∘]:=
```
xco = CoefficientList[xwerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[∘]= {Axx, −3 Axx + 3 Bxx, 3 Axx − 6 Bxx + 4 Cxx, −Axx + 3 Bxx − 4 Cxx + 2 Dxx}

In[∘]:=
```
Eq = xco == {3 a, 0, -a, 0};
```

In[∘]:=
```
solx = Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```
löse

Out[∘]= $\{\{Axx \to 3\,a,\ Bxx \to 3\,a,\ Cxx \to 2\,a,\ Dxx \to a\}\}$

In[∘]:= $x[t\_] := \frac{a\,(3-t^2)}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{a\,t\,(3-t^2)}{(1+t^2)}$

Berechnung y-Koordinaten

In[∘]:=
```
ywerte = Ayy Rw[0, t] + Byy Rw[1, t] + Cyy Rw[2, t] + Dyy Rw[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[∘]= $-Ayy\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,Byy\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,Cyy - 2\,Cyy\,t + Dyy\,t)\right)$

In[∘]:=
```
yco = CoefficientList[ywerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[∘]= {Ayy, −3 Ayy + 3 Byy, 3 Ayy − 6 Byy + 4 Cyy, −Ayy + 3 Byy − 4 Cyy + 2 Dyy}

In[∘]:=
```
Eqy = yco == {0, 3 a, 0, -a};
```

In[∘]:=
```
soly = Solve[Eqy, {Ayy, Byy, Cyy, Dyy}]
```
löse

Out[∘]= $\left\{\left\{Ayy \to 0,\ Byy \to a,\ Cyy \to \frac{3\,a}{2},\ Dyy \to a\right\}\right\}$

- Steuerpunkte sind also, 3a=Schlaufenbreite

$$\left\{A = \{3a, 0\},\ B = \{3a, a\},\ Cc = \left\{2a, \frac{3}{2}a\right\},\ Dd = \{a, a\}\right\}$$

In[ ]:= $x[t\_] := \frac{a(3-t^2)}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{a\,t(3-t^2)}{(1+t^2)}$

Parameterdarstellung mit rationalen Bézierssplines (wie erwartet)

In[ ]:=
```
Axx Rw[0, t] + Bxx Rw[1, t] + Cxx Rw[2, t] + Dxx Rw[3, t] /. solx // Simplify
```
vereinfache

Out[ ]= $$\left\{-\frac{a(-3+t^2)}{1+t^2}\right\}$$

In[ ]:=
```
Ayy Rw[0, t] + Byy Rw[1, t] + Cyy Rw[2, t] + Dyy Rw[3, t] /. soly // Simplify
```
vereinfache

Out[ ]= $$\left\{-\frac{a\,t(-3+t^2)}{1+t^2}\right\}$$

$$\left\{A = \{3a, 0\},\ B = \{3a, a\},\ C = \left\{2a, \frac{3}{2}a\right\},\ D = \{a, a\}\right\}$$

Konstante leite ab

GeoGebra-Dateien dazu echte-Trisektrix.ggb