Höhere Mathematik sehen und verstehen,

Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021 Interaktive Version mit kostenlosem Mathematica Player

Trisektrix mit rationalen Bézierspline

Herleitung einer Parameterdarstellung für Trisektrix

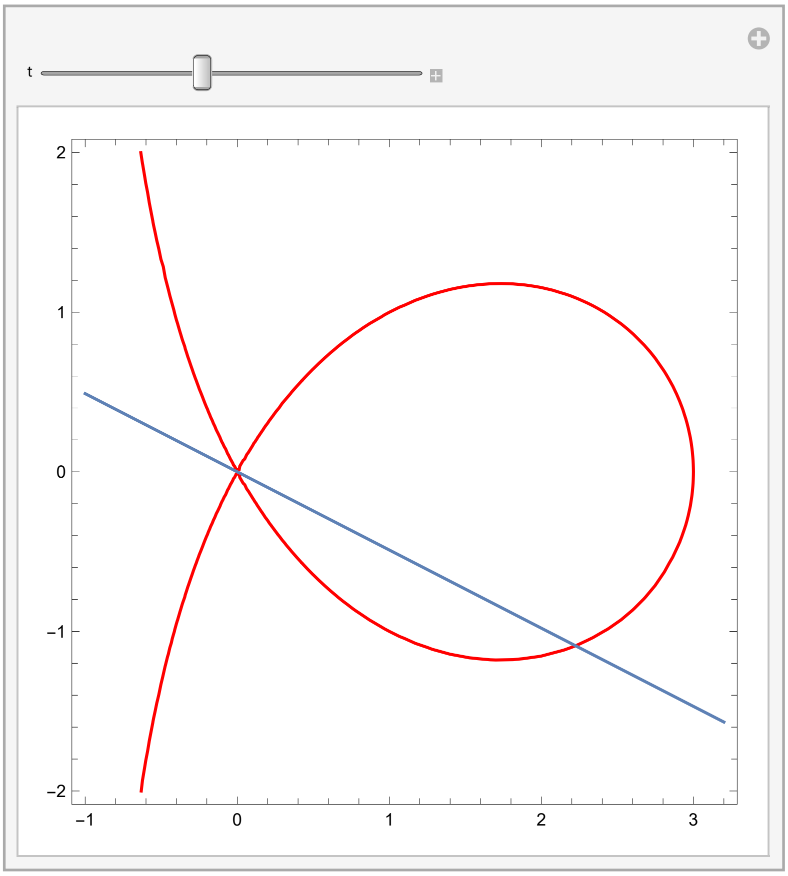
Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch die Singularität schneidet die Trisektrix.
Die Steigung t dieser Geraden eignet sich als Parameter.
Ziehe t im interaktiven Kasten.

- Trisektrix $(a + x)\, y^2 = (3a - x)\, x^2$ Kurvenbuch Seite 64

```
In[ ]:= trisektrix = ContourPlot[{(1 + x) y^2 - (3 - x) x^2 == 0
                    Konturgraphik
      }, {x, -1, 3.2}, {y, -2, 2}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
                                   Seitenverhältnis   Konturenstil     rot
```

In[ ]:=
```
Manipulate[Show[trisektrix, Plot[t x, {x, -1, 3.2}, PlotRange → {-2, 2}]],
 {{t, -0.4}, -3, 3}, SaveDefinitions → True]
```
manipuliere | zeige an | stelle Funktion graphisch dar | Koordinatenbereich der Graphik | speichere Definitionen | wahr

Out[ ]=




```
Solve[{(a + x) y^2 - (3 a - x) x^2 == 0, y == t x}, {x, y}]
```
löse

```
(*Schnittpunkte der Geraden durch die Singularität mit der Trisktrix*)
```

Out[ ]= $\left\{\{x \to 0, y \to 0\}, \left\{x \to \frac{3 a - a t^2}{1 + t^2}, y \to \frac{3 a t - a t^3}{1 + t^2}\right\}\right\}$

- Das ist nun die Parameterdarstellung der Trisektrix

Definition rationaler Bézierspline-Basis

Bernsteinpolynome

In[4]:=
```
b[0, t_] := (1 - t)^3;
b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;
b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t); b[3, t_] := t^3
```

In[ ]:=
```
Rw =.
```

```
In[∘]:= Rw[i_, t_] := ww[i] × b[i, t] / Sum[ww[j] × b[j, t], {j, 0, 3}];
        Rw[i, t]
```

$$\text{In[∘]:=}\quad \frac{b[i,t]\times ww[i]}{(1-t)^3\, ww[0]+3\,(1-t)^2\, t\, ww[1]+3\,(1-t)\, t^2\, ww[2]+t^3\, ww[3]}$$

Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

In[∘]:= $\left\{x\to\frac{3a-at^2}{1+t^2},\ y\to\frac{3at-at^3}{1+t^2}\right\}$ `(*Trisektrix, Schlaufenbreite 3a*)`

Out[∘]= $\left\{x\to\frac{3a-at^2}{1+t^2},\ y\to\frac{3at-at^3}{1+t^2}\right\}$

Die Gewichte müssen aus dem Nenner bestimmt werden

```
In[∘]:= nenner = Sum[ww[j] × b[j, t], {j, 0, 3}]
                 summiere
```

Out[∘]= $(1-t)^3\, ww[0]+3\,(1-t)^2\, t\, ww[1]+3\,(1-t)\, t^2\, ww[2]+t^3\, ww[3]$

```
CoLi = CoefficientList[nenner, t] (* für Koeffizientenvergleich*)
       Liste der Koeffizienten
```

Out[∘]= {ww[0], −3 ww[0] + 3 ww[1], 3 ww[0] − 6 ww[1] + 3 ww[2], −ww[0] + 3 ww[1] − 3 ww[2] + ww[3]}

```
In[∘]:= lo = Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
             löse
```

Out[∘]= $\left\{\left\{ww[0]\to 1,\ ww[1]\to 1,\ ww[2]\to\frac{4}{3},\ ww[3]\to 2\right\}\right\}$

Also sind die Gewichte (übrigens ebenso wie für den Kreis)

```
In[∘]:= W = {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]} /. lo⟦1⟧
```

Out[∘]= $\left\{1,\ 1,\ \frac{4}{3},\ 2\right\}$

```
In[7]:= nenner = Sum[ww[i] × b[i, t], {i, 0, 3}] /. lo⟦1⟧ // Simplify  (* wie erwartet*)
                 summiere                                  vereinfache
```

Out[7]= $1+t^2$ /. lo⟦1⟧

Vergleich der Bernsteinpolynome mit der rationalen Version

Rationale B-Splines für die Trisektrix

Trisektrix Parameterdarstellung

In[∘]:= $x[t\_] := \frac{a\,(3 - t^2)}{(1 + t^2)};\ y[t\_] := \frac{a\,t\,(3 - t^2)}{(1 + t^2)}$

Nenner wie beim Kreis führt zu den Gewichten

In[1]:= $\{ww[0] = 1,\ ww[1] = 1,\ ww[2] = \frac{4}{3},\ ww[3] = 2\}$

Out[1]= $\{1,\ 1,\ \frac{4}{3},\ 2\}$

und damit auch zu denselben rationalen B-Splines

In[8]:= $R[i\_, t\_] := \frac{ww[i] \times b[i, t]}{1 + t^2}$

In[9]:= `{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]} // Simplify`
vereinfache

Out[9]= $\left\{-\frac{(-1+t)^3}{1+t^2},\ \frac{3\,(-1+t)^2\,t}{1+t^2},\ -\frac{4\,(-1+t)\,t^2}{1+t^2},\ \frac{2\,t^3}{1+t^2}\right\}$

Berechnung der Steuerpunkte

Punkte

In[∘]:= `P = {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}`

Out[∘]= `{{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}`

Berechnung x-Koordinaten

In[11]:= `xwerte = Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] // Simplify // Numerator`
vereinfache Zähler

Out[11]= $-Axx\,(-1+t)^3 + t\,(3\,Bxx\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,Cxx - 2\,Cxx\,t + Dxx\,t))$

In[12]:= `xco = CoefficientList[xwerte, t]`
Liste der Koeffizienten

Out[12]= $\{Axx,\ -3\,Axx + 3\,Bxx,\ 3\,Axx - 6\,Bxx + 4\,Cxx,\ -Axx + 3\,Bxx - 4\,Cxx + 2\,Dxx\}$

In[∘]:= $x[t\_] := \frac{a\,(3 - t^2)}{(1 + t^2)};\ y[t\_] := \frac{a\,t\,(3 - t^2)}{(1 + t^2)}$

In[13]:= $Eq = xco == \{3\,a,\ 0,\ -a,\ 0\};$

In[14]:=
```
solx = Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```
löse

Out[14]= $\{\{Axx \to 3\,a,\ Bxx \to 3\,a,\ Cxx \to 2\,a,\ Dxx \to a\}\}$

○ Berechnung y-Koordinaten

In[15]:=
```
ywerte = Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[15]= $-Ayy\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,Byy\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,Cyy - 2\,Cyy\,t + Dyy\,t)\right)$

In[16]:=
```
yco = CoefficientList[ywerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[16]= $\{Ayy,\ -3\,Ayy + 3\,Byy,\ 3\,Ayy - 6\,Byy + 4\,Cyy,\ -Ayy + 3\,Byy - 4\,Cyy + 2\,Dyy\}$

In[17]:=
```
Eqy = yco == {0, 3 a, 0, -a};
```

In[18]:=
```
soly = Solve[Eqy, {Ayy, Byy, Cyy, Dyy}]
```
löse

Out[18]= $\left\{\left\{Ayy \to 0,\ Byy \to a,\ Cyy \to \frac{3\,a}{2},\ Dyy \to a\right\}\right\}$

○ Steuerpunkte sind also, 3a=Schlaufenbreite

In[ ]:= $\left\{A = \{3\,a, 0\},\ B = \{3\,a, a\},\ Cc = \left\{2\,a, \frac{3}{2}\,a\right\},\ Dd = \{a, a\}\right\}$

Out[ ]= $\left\{\{3\,a, 0\},\ \{3\,a, a\},\ \left\{2\,a, \frac{3\,a}{2}\right\},\ \{a, a\}\right\}$

In[ ]:= $x[t\_] := \frac{a\,(3-t^2)}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{a\,t\,(3-t^2)}{(1+t^2)}$

● Parameterdarstellung mit rationalen Béziersplines (wie erwartet)

In[20]:=
```
Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] /. solx // Simplify
```
vereinfache

Out[20]= $\left\{-\frac{a\,(-3+t^2)}{1+t^2}\right\}$

In[21]:=
```
Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] /. soly // Simplify
```
vereinfache

Out[21]= $\left\{-\frac{a\,t\,(-3+t^2)}{1+t^2}\right\}$

$\left\{A = \{3\,a, 0\},\ B = \{3\,a, a\},\ C = \left\{2\,a, \frac{3}{2}\,a\right\},\ D = \{a, a\}\right\}$
Konstante leite ab

■ GeoGebra-Dateien dazu echte-Trisektrix.ggb