Bilder für das Buch

Splines-und-NURBS.nb

Buch:Höhere Mathematik sehen und verstehen, Haftendorn, Riebesehl, Dammer, Springer Spektrum, Feb. 2021

Datei Splines-und-NURBS.nb zu Abschnitt 5.4.3.1 Seite 379, Abb. 5.23

Bézier-Splines zusammengesetzt

B-Spline Basisfunktionen

B-Spline ungeschicktes Beispiel

NURBS

Viertelkreis mit Béziersplines,

Final-Version mit Bestimmungen für den Viertelkreis

echter Kreis -Berechnung

bei Kenntnis der wahren Parameterdarstellung

In[∘]:=
```
Pk = {{0, 1}, {e, 1}, {1, f}, {1, 0}};
```

In[∘]:=
```
wk = {a, b, c, d};
```

In[∘]:=
```
bb = Thread[Times[wk, {b0[t], b1[t], b2[t], b3[t]}]]
```
fädle auf, multipliziere

Out[∘]=
$$\left\{a\left(\begin{cases}(1-t)^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),\ b\left(\begin{cases}3(1-t)^2 t & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),\ c\left(\begin{cases}3(1-t)t^2 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),\ d\left(\begin{cases}t^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)\right\}$$

In[∘]:=
```
Plus @@ bb // Simplify
```
addiere, vereinfache

Out[∘]=
$$\begin{cases}-a(-1+t)^3+t\left(3b(-1+t)^2+t(3c-3ct+dt)\right) & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$$

In[∘]:=
$$\text{BSk[t\_]} := \frac{\text{bb}}{\text{Plus @@ bb}}\text{.Pk // Simplify}$$
vereinfache

In[∘]:=
```
BSk[t]
```

Out[∘]=
$$\left\{\begin{cases}\frac{t\left(3be(-1+t)^2+t(-3c(-1+t)+dt)\right)}{-a(-1+t)^3+t\left(3b(-1+t)^2+t(3c-3ct+dt)\right)} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{(-1+t)\left(a(-1+t)^2+3t(b-bt+cft)\right)}{a(-1+t)^3-t\left(3b(-1+t)^2+t(3c-3ct+dt)\right)} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases}\right\}$$

In[∘]:=
```
CoefficientList[-a (-1 + t)^3 + t (3 b (-1 + t)^2 + t (3 c - 3 c t + d t)), t] (*Nenner*)
```
Liste der Koeffizienten

Out[∘]= $\{a,\ -3a+3b,\ 3a-6b+3c,\ -a+3b-3c+d\}$

In[∘]:=
```
CoefficientList[t (3 b e (-1 + t)^2 + t (-3 c (-1 + t) + d t)), t] (*erster Zähler*)
```
Liste der Koeffizienten

Out[∘]= $\{0,\ 3be,\ 3c-6be,\ -3c+d+3be\}$

Kenntnis der Parameterdarstellung (Nenner: $1+t^2$, erster Zähler: $2t$, zweiter Zähler: $-1+t^2$)

In[∘]:=
```
lo = Solve[{{a, -3 a + 3 b, 3 a - 6 b + 3 c, -a + 3 b - 3 c + d} == {1, 0, 1, 0},
   {0, 3 b e, 3 c - 6 b e, -3 c + d + 3 b e} == {0, 2, 0, 0} (*,
   (-1+t) (a (-1+t)^2+3 t (b-b t+c f t))=={-1,0,1,0 }*)}, {a, b, c, d, e, f}]
```
löse

Out[∘]= $\left\{\left\{a\to 1,\ b\to 1,\ c\to \frac{4}{3},\ d\to 2,\ e\to \frac{2}{3}\right\}\right\}$

In[∘]:=
```
flo = (-1 + t) (a (-1 + t)^2 + 3 t (b - b t + c f t)) /. lo // Expand (*Zweiter Zähler*)
```
multipliziere aus

Out[∘]= $\{-1+3t^2-4ft^2-2t^3+4ft^3\}$

In[∘]:=
$$\{-1+3t^2-4ft^2-2t^3+4ft^3\}\ \text{/. } f\to\frac{1}{2}\ \text{(* damit } t^3 \text{ verschwindet*)}$$

$$\{-1+t^2\}\ \text{(* wie gewünscht *)}$$

In[∘]:=
$$\text{Pk} = \{\{0, 1\}, \{e, 1\}, \{1, f\}, \{1, 0\}\}\ \text{/. }\left\{f\to\frac{1}{2},\ e\to\frac{2}{3}\right\}$$

Out[∘]= $\left\{\{0, 1\},\ \left\{\frac{2}{3}, 1\right\},\ \left\{1, \frac{1}{2}\right\},\ \{1, 0\}\right\}$

In[∘]:=
```
bb = (bb /. lo)[[1, 1]]
```

Out[∘]=

$$\left\{\begin{cases}(1-t)^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}3(1-t)^2 t & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases},\ \frac{4}{3}\left(\begin{cases}3(1-t)\,t^2 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),\ 2\left(\begin{cases}t^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)\right\}$$

In[∘]:=
```
BSk[t_] := (bb/(Plus @@ bb).Pk) // Simplify
                                   vereinfache
```

In[∘]:=
```
BSk[t]
```

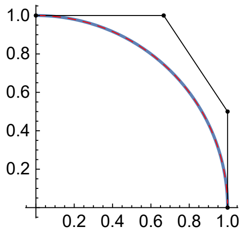
Out[∘]=

$$\left\{\begin{cases}\frac{2t}{1+t^2} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{1-t^2}{1+t^2} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases}\right\}$$

Die interpolierende Kurve ist jetzt eine mit rationalen Parameterfunktionen. Damit sind prinzipiell auch Kreise, Kegelschnitte usw. erreichbar, die alle eine Parametrisierung mit rationalen Funktionen haben. (Die auf S. 7 ist wirklich der Kreis).

In[∘]:=
```
Show[ParametricPlot[BSk[t] // Evaluate, {t, 0, 1}],
zeig·· parametrische Darstellung   werte aus
 Graphics[{PointSize[0.02], Point[Pk], Line[Pk], Red,
           Punktgröße      Punkt      Linie     rot
   Dashed, Circle[{0, 0}, 1, {0, Pi/2}]}], PlotRange → All]
           Kreis                 Kreiszahl π   Koordinatenb··· alle
```

Out[∘]=



○ Viertelkreis und Verwandte

In[∘]:=
```
Pk = {{0, 1}, {2/3, 1}, {1, 1/2}, {1, 0}}; (* mit dem neuen Pk*)
```

In[∘]:=
```
wkD = {1, 1, 4/3, 5}; wkD2 = {1, 1, 4/3, 1/2};
wkD3 = {1, 1, 4/3, 10}; wkD4 = {1, 1, 4/3, 1/8};
```

In[∘]:=
```
bbD = Thread[Times[wkD, {b0[t], b1[t], b2[t], b3[t]}]];
      fädle auf multipliziere
bbD2 = Thread[Times[wkD2, {b0[t], b1[t], b2[t], b3[t]}]];
       fädle auf multipliziere
bbD3 = Thread[Times[wkD3, {b0[t], b1[t], b2[t], b3[t]}]];
       fädle auf multipliziere
bbD4 = Thread[Times[wkD4, {b0[t], b1[t], b2[t], b3[t]}]]
       fädle auf multipliziere
```

Out[∘]= $\left\{\begin{cases}(1-t)^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}3(1-t)^2 t & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases},\ \frac{4}{3}\left(\begin{cases}3(1-t)\,t^2 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),\ \frac{1}{8}\left(\begin{cases}t^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)\right\}$

In[∘]:=
```
Plus @@ bbD // Simplify
```
addiere vereinfache

Out[∘]= $\begin{cases}1+t^2+3t^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$

In[∘]:=
```
Plus @@ bbD2 // Simplify
```
addiere vereinfache
```
Plus @@ bbD3 // Simplify
```
addiere vereinfache
```
Plus @@ bbD4 // Simplify
```
addiere vereinfache

Out[∘]= $\begin{cases}1+t^2-\frac{3t^3}{2} & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$

Out[∘]= $\begin{cases}1+t^2+8t^3 & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$

Out[∘]= $\begin{cases}1+t^2-\frac{15t^3}{8} & 0<t\le 1\\ 0 & \text{True}\end{cases}$

In[∘]:= $\text{BSkD}[t\_] := \dfrac{\text{bbD}}{\text{Plus @@ bbD}}.\text{Pk} \ // \ \text{Simplify}$
vereinfache

$\text{BSkD2}[t\_] := \dfrac{\text{bbD2}}{\text{Plus @@ bbD2}}.\text{Pk} \ // \ \text{Simplify}$
vereinfache

$\text{BSkD3}[t\_] := \dfrac{\text{bbD3}}{\text{Plus @@ bbD3}}.\text{Pk} \ // \ \text{Simplify}$
vereinfache

$\text{BSkD4}[t\_] := \dfrac{\text{bbD4}}{\text{Plus @@ bbD4}}.\text{Pk} \ // \ \text{Simplify}$
vereinfache

In[∘]:=
```
BSkD[t]
```

Out[∘]= $\left\{\begin{cases}\frac{t(2+3t^2)}{1+t^2+3t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{1-t^2}{1+t^2+3t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases}\right\}$

In[∘]:=
```
BSkD2[t]
BSkD3[t]
BSkD4[t]
```

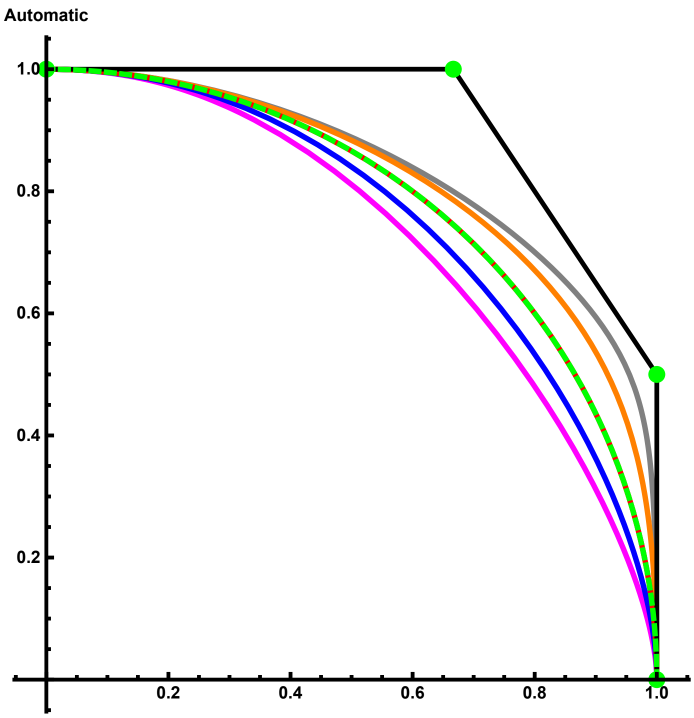
Out[∘]= $\left\{\begin{cases}\frac{4t-3t^3}{2+2t^2-3t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{2-2t^2}{2+2t^2-3t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases}\right\}$

Out[∘]= $\left\{\begin{cases}\frac{2(t+4t^3)}{1+t^2+8t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{1-t^2}{1+t^2+8t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases}\right\}$

Out[∘]= $\left\{\begin{cases}\frac{16t-15t^3}{8+8t^2-15t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases},\ \begin{cases}\frac{8-8t^2}{8+8t^2-15t^3} & 0<t\le 1\\ \text{Indeterminate} & \text{True}\end{cases}\right\}$

Die interpolierende Kurve ist jetzt eine mit rationalen Parameterfunktionen. Damit sind prinzipiell auch Kreise, Kegelschnitte usw. erreichbar, die alle eine Parametrisierung mit rationalen Funktionen haben.

```
Show[
zeige an
 ParametricPlot[BSkD4[t] // Evaluate, {t, 0, 1},
 parametrische Darstellung  werte aus
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Gray}], (*zu 1/8*)
  Darstellungsstil  Dicke  grau
 ParametricPlot[BSkD2[t] // Evaluate, {t, 0, 1},
 parametrische Darstellung  werte aus
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Orange}], (*zu 1/2*)
  Darstellungsstil  Dicke  orange
 ParametricPlot[BSk[t] // Evaluate, {t, 0, 1},
 parametrische Darstellung  werte aus
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Red}(*Dieter zu 2*)],
  Darstellungsstil  Dicke  rot
 ParametricPlot[BSkD[t] // Evaluate, {t, 0, 1},
 parametrische Darstellung  werte aus
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Blue}], (*zu 5*)
  Darstellungsstil  Dicke  blau
 ParametricPlot[BSkD3[t] // Evaluate, {t, 0, 1},
 parametrische Darstellung  werte aus
  PlotStyle → {Thickness[0.008], Magenta}], (*zu 10*)
  Darstellungsstil  Dicke  magenta
 Graphics[{Black, Thickness[0.007], Line[Pk], Green, PointSize[0.025], Point[Pk],
 Graphik  schwarz  Dicke  Linie  grün  Punktgröße  Punkt
   Green, Dashed, Thickness[0.008], Opacity[1], Circle[{0, 0}, 1, {0, Pi/2}]}],
   grün  gestrich··  Dicke  Deckkraft  Kreis  Kreiszahl π
 PlotRange → All, AxesStyle -> Thick, LabelStyle → Directive[Bold],
 Koordinatenb···  alle  Achsenstil  dick  Beschriftungsstil  Anweisung  fett
 AxesLabel -> Automatic]
 Achsenbeschri··  automatisch
```

Out[ ]=


- Vorderes Bild von NURBS1 (Link zum Bild)

- erste Version, bei der kein kein Viertelkreis herauskommt

Knoten sind nicht uniform, keine Wiederholungen

```
In[ ]:= (*Quit*)
          beende Kernel

In[ ]:= T = {0, 1/2, 3/4, 1, 2, 4, 5, 20/3, 9};

        T = {0, 1/2, 3/4, 6/5, 2, 5/2, 3, 17/5, 18/5}

Out[ ]= {0, 1/2, 3/4, 6/5, 2, 5/2, 3, 17/5, 18/5}

In[ ]:= t[i_] := T[[i + 1]]

In[ ]:= Bn[i_, 0, x_] := Piecewise[{{1, t[i] ≤ x < t[i + 1]}}]
                           stückweise

In[ ]:= {Bn[0, 0, x], Bn[1, 0, x], Bn[2, 0, x], Bn[3, 0, x], Bn[4, 0, x]};
```

- Jetzt die Rekursion, Verbesserte Version

$$Bn[i\_, p, x\_] := \frac{x - t[i]}{t[i+p] - t[i]} Bn[i, p-1, x] + \frac{t[i+p+1] - x}{t[i+p+1] - t[i+1]} Bn[i+1, p-1, x]$$

In[ ]:=
$$Bn[i\_, 1, x\_] := \frac{x - t[i]}{t[i+1] - t[i]} Bn[i, 0, x] + \frac{t[i+2] - x}{t[i+2] - t[i+1]} Bn[i+1, 0, x]$$

In[∘]:= $\text{Bn[i\_, 2, x\_]} := \dfrac{x - t[i]}{t[i+2] - t[i]}\,\text{Bn}[i, 1, x] + \dfrac{t[i+3] - x}{t[i+3] - t[i+1]}\,\text{Bn}[i+1, 1, x]$

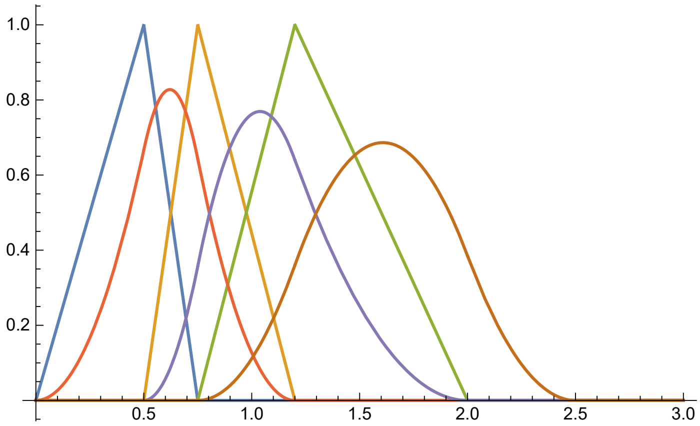
In[∘]:= $\text{Bn[i\_, 3, x\_]} := \dfrac{x - t[i]}{t[i+3] - t[i]}\,\text{Bn}[i, 2, x] + \dfrac{t[i+4] - x}{t[i+4] - t[i+1]}\,\text{Bn}[i+1, 2, x]$

In[∘]:= $\text{Bn[i\_, 4, x\_]} := \dfrac{x - t[i]}{t[i+4] - t[i]}\,\text{Bn}[i, 3, x] + \dfrac{t[i+5] - x}{t[i+5] - t[i+1]}\,\text{Bn}[i+1, 3, x]$

○ Prüfung der Bilder

In[∘]:=
```
Plot[{Bn[0, 1, x], Bn[1, 1, x], Bn[2, 1, x],
stelle Funktion graphisch dar
  Bn[0, 2, x], Bn[1, 2, x], Bn[2, 2, x]}, {x, 0, 3}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=

Die Zackenkurven B[n[i,1,x] stimmen nun.

In[∘]:= `{Bn[0, 1, x], Bn[1, 1, x], Bn[2, 1, x], Bn[3, 1, x]}`

Out[∘]=

$$\left\{2x\left(\begin{cases}1 & 0 \le x < \frac{1}{2}\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right) + 4\left(\frac{3}{4} - x\right)\left(\begin{cases}1 & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),\right.$$

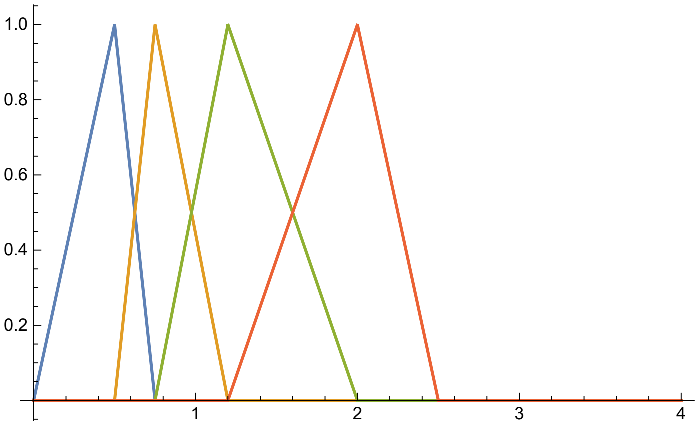
$$4\left(-\frac{1}{2} + x\right)\left(\begin{cases}1 & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4}\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right) + \frac{20}{9}\left(\frac{6}{5} - x\right)\left(\begin{cases}1 & \frac{3}{4} \le x < \frac{6}{5}\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),$$

$$\frac{20}{9}\left(-\frac{3}{4} + x\right)\left(\begin{cases}1 & \frac{3}{4} \le x < \frac{6}{5}\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right) + \frac{5}{4}(2 - x)\left(\begin{cases}1 & \frac{6}{5} \le x < 2\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right),$$

$$\left.\frac{5}{4}\left(-\frac{6}{5} + x\right)\left(\begin{cases}1 & \frac{6}{5} \le x < 2\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right) + 2\left(\frac{5}{2} - x\right)\left(\begin{cases}1 & 2 \le x < \frac{5}{2}\\ 0 & \text{True}\end{cases}\right)\right\}$$

In[∘]:=
```
Plot[{Bn[0, 1, x], Bn[1, 1, x], Bn[2, 1, x], Bn[3, 1, x]}, {x, 0, 4}]
 stelle Funktion graphisch dar
```

Out[∘]=

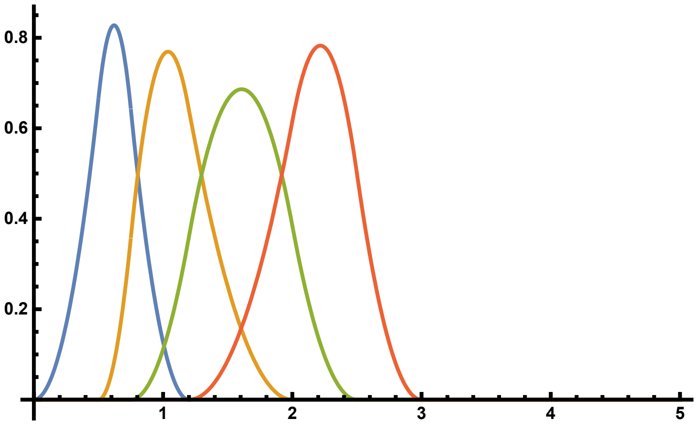


In[∘]:=
```
{Bn[0, 2, x], Bn[1, 2, x], Bn[2, 2, x], Bn[3, 2, x]};
```

In[∘]:=

In[∘]:=
```
Plot[{Bn[0, 2, x], Bn[1, 2, x], Bn[2, 2, x], Bn[3, 2, x]}, {x, 0, 5},
 stelle Funktion graphisch dar
  PlotStyle -> Thick, AxesStyle → Thick, LabelStyle → Bold, PlotRange → All]
  Darstellungsstil dick  Achsenstil  dick  Beschriftungsstil fett  Koordinatenb··· alle
```

Out[∘]=

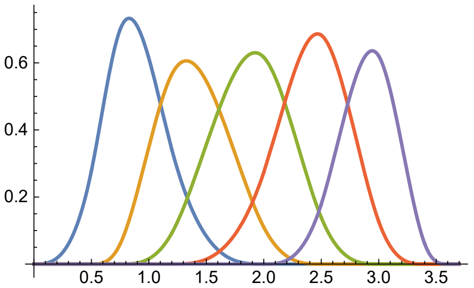


Jede ist aus drei Parabeln aufgebaut

In[∘]:=
```
{Bn[0, 3 x], Bn[1, 3, x], Bn[2, 3, x], Bn[3, 3, x], Bn[4, 3, x]};
```

In[∘]:=
```
alle3er = Plot[{Bn[0, 3, x], Bn[1, 3, x], Bn[2, 3, x], Bn[3, 3, x], Bn[4, 3, x]},
           stelle Funktion graphisch dar
   {x, 0, 3.7}, PlotStyle → Thickness[0.008], PlotRange → All]
                Darstellungsstil Dicke        Koordinatenb··· alle
```

Out[∘]=



So das ist alles wohl so richtig und diffbar.

In[∘]:=
```
Tpkte = Table[{T[[i]], 0}, {i, 1, 8}]
            Tabelle
```

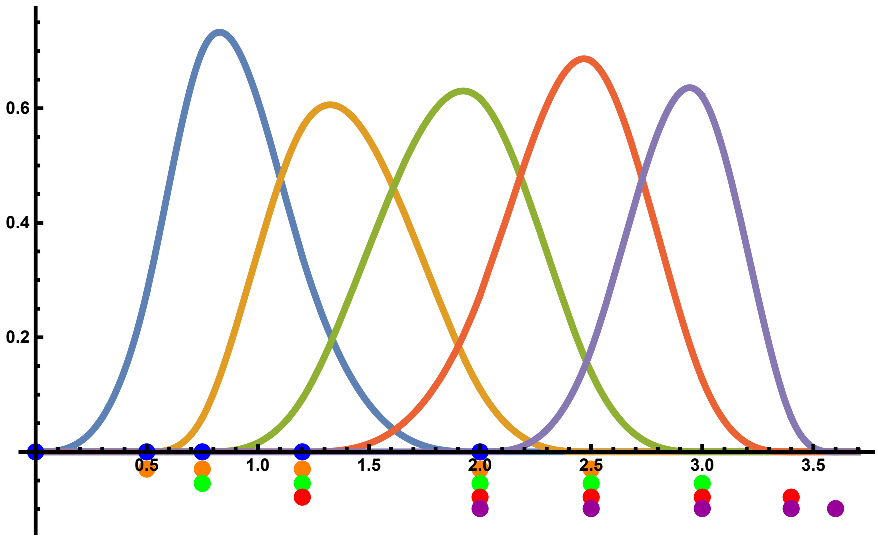
Out[∘]= $\{\{0, 0\}, \{\frac{1}{2}, 0\}, \{\frac{3}{4}, 0\}, \{\frac{6}{5}, 0\}, \{2, 0\}, \{\frac{5}{2}, 0\}, \{3, 0\}, \{\frac{17}{5}, 0\}\}$

```
(*ListPlot[Labeled[#,#]&/@Table[Prime[n],{n,10}],
 PointLegend[{t0,t1,t2,t3,t4,t6,t7,t8}]*)
Ich wollte mit deb t beschrifen, hab ich nicht hinbekommen.
```

In[∘]:=
```
Show[alle3er,
zeige an

 Graphics[{PointSize[0.02], Blue, Point[{{0, 0}, {1/2, 0}, {3/4, 0}, {6/5, 0}, {2, 0}}],
 Graphik   Punktgröße          blau  Punkt

   Orange, Point[{{1/2, -0.03}, {3/4, -0.03}, {6/5, -0.03}, {2, -0.03}, {5/2, -0.03}}],
   orange  Punkt

   Green, Point[{{3/4, -0.055}, {6/5, -0.055}, {2, -0.055}, {5/2, -0.055}, {3, -0.055}}],
   grün   Punkt

   Red, Point[{{6/5, -0.079}, {2, -0.079}, {5/2, -0.079}, {3, -0.079}, {17/5, -0.079}}],
   rot  Punkt

   RGBColor[0.6, 0, 0.6],
   RGB Farbe

   Point[{{2, -0.099}, {5/2, -0.099}, {3, -0.099}, {17/5, -0.099}, {18/5, -0.099}}]
   Punkt


 }], AxesStyle -> Thick, LabelStyle → Directive[Bold]]
     Achsenstil    dick   Beschriftungsstil Anweisung fett
```

○ Bild im Buch

Out[∘]=



Knoten sind nicht uniform, mit Wiederholungen