Höhere Mathematik sehen und verstehen,
Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021

Kreis mit rationalen Béziersplines, Version Anregung 5.2 mit N2=(-1,0)

Bernsteinpolynome

In[88]:=
```
b[0, t_] := (1 - t)^3;
b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;
b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t); b[3, t_] := t^3
```

Herleitung einer Parameterdarst. für den Kreis

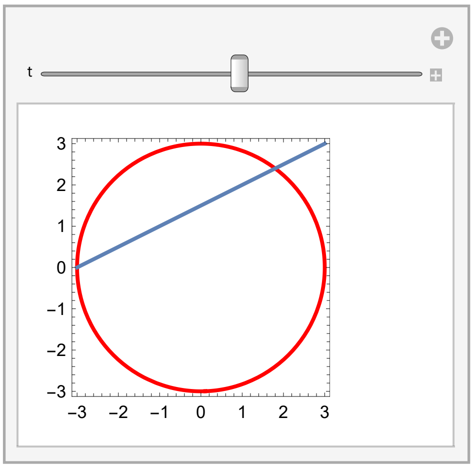
Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch einen bekannten Punkt schneidet den Kreis.
Die Steigung t dieser Geraden eignet sich als Parameter.

Kreis $x^2 + y^2 == r^2$

In[91]:=
```
kreis =
  ContourPlot[x^2 + y^2 == 9, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
```
Konturgraphik   Seitenverhältnis   Konturenstil   rot

In[92]:=
```
Manipulate[Show[{kreis, Plot[t (x + r) /. r → 3, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0},
    Axes → True, PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}}]}],
 {{t, 0.5}, -10
  , 10}]
```
manipuliere · zeige an · stelle Funktion graphisch dar · Achsenursprung · Achsen · wahr · Koordinatenbereich der Graphik

Out[92]=



In[93]:=
```
Solve[{x^2 + y^2 == r^2, y == t (x + r)}, {x, y}]
```
löse

Out[93]=

$$\left\{\{x \to -r, y \to 0\}, \left\{x \to \frac{r - r\,t^2}{1 + t^2}, y \to \frac{2\,r\,t}{1 + t^2}\right\}\right\}$$

Definition rationaler Bézierspline-Basis

In[∘]:=
```
Rw =.
```

In[94]:=

$$\text{Rw[i\_, t\_]} := \frac{\text{ww[i]} \times \text{b[i, t]}}{\text{Sum[ww[j]} \times \text{b[j, t], \{j, 0, 3\}]}};$$

```
Rw[i, t]
```

Out[95]=

$$\frac{\text{b[i, t]} \times \text{ww[i]}}{(1 - t)^3\,\text{ww[0]} + 3\,(1 - t)^2\,t\,\text{ww[1]} + 3\,(1 - t)\,t^2\,\text{ww[2]} + t^3\,\text{ww[3]}}$$

Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

In[115]:=

$$\text{x[t\_]} := \frac{r - r\,t^2}{1 + t^2};\ \text{y[t\_]} := \frac{2\,r\,t}{1 + t^2}\ \text{(*Kreis, Parameterdarst. umgehrt wie in Buch*)}$$

Die Gewichte müssen aus dem Nenner mit Koeffizientenvergleich bestimmt werden

In[96]:=
```
nenner = Sum[ww[j] × b[j, t], {j, 0, 3}]
```
summiere

Out[96]=
$$(1-t)^3\,ww[0] + 3\,(1-t)^2\,t\,ww[1] + 3\,(1-t)\,t^2\,ww[2] + t^3\,ww[3]$$

In[97]:=
```
CoLi = CoefficientList[nenner, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[97]=
$$\{ww[0],\ -3\,ww[0] + 3\,ww[1],\ 3\,ww[0] - 6\,ww[1] + 3\,ww[2],\ -ww[0] + 3\,ww[1] - 3\,ww[2] + ww[3]\}$$

In[∘]:=
```
Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
```
löse

Out[∘]=
$$\left\{\left\{ww[0] \to 1,\ ww[1] \to 1,\ ww[2] \to \frac{4}{3},\ ww[3] \to 2\right\}\right\}$$

Also sind die Gewichte für den Kreis:

In[∘]:=
$$W = \left\{1, 1, \frac{4}{3}, 2\right\};$$

In[98]:=
```
w[i_] := W[[i + 1]]
```

In[99]:=
```
nenner = Sum[w[i] × b[i, t], {i, 0, 3}] // Simplify  (* wie erwartet*)
```
summiere vereinfache

Out[99]=
$$1 + t^2$$

● Aufbau der Bernsteinpolynome in der rationalen Version

Verwendung der Gewichte auch im Zähler der rationalen Bézierbasis

In[100]:=
$$R[i\_, t\_] := \frac{w[i] \times b[i, t]}{nenner}$$

In[101]:=
```
{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}
```

Out[101]=
$$\left\{\frac{(1-t)^3}{1+t^2},\ \frac{3\,(1-t)^2\,t}{1+t^2},\ \frac{4\,(1-t)\,t^2}{1+t^2},\ \frac{2\,t^3}{1+t^2}\right\}$$

○ Vergleichende Bilder

■ Steuerpunkte für den Kreis

Punkte (Variabel gelassen)

In[102]:=
```
P = {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
```

Out[102]=
```
{{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
```

Kreis Parameterdarstellung in dieser Version

In[103]:=

$$x[t\_] := \frac{r\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)};\ y[t\_] := \frac{2\,r\,t}{\left(1+t^2\right)};$$

Berechnung der Steuerpunkte im Gerüst für den Kreis

Berechnung x-Koordinaten

In[104]:=

```
xwerte = Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] // Simplify // Numerator
```

vereinfache   Zähler

Out[104]=

$$-\mathrm{Axx}\,(-1+t)^3 + t\left(3\,\mathrm{Bxx}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\mathrm{Cxx} - 2\,\mathrm{Cxx}\,t + \mathrm{Dxx}\,t)\right)$$

In[105]:=

```
xco = CoefficientList[xwerte, t]
```

Liste der Koeffizienten

Out[105]=

$$\{\mathrm{Axx},\ -3\,\mathrm{Axx} + 3\,\mathrm{Bxx},\ 3\,\mathrm{Axx} - 6\,\mathrm{Bxx} + 4\,\mathrm{Cxx},\ -\mathrm{Axx} + 3\,\mathrm{Bxx} - 4\,\mathrm{Cxx} + 2\,\mathrm{Dxx}\}$$

In[106]:=

```
Eq = xco == {r, 0, -r , 0};
```

In[107]:=

```
solx = Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```

löse

Out[107]=

$$\left\{\left\{\mathrm{Axx} \to r,\ \mathrm{Bxx} \to r,\ \mathrm{Cxx} \to \frac{r}{2},\ \mathrm{Dxx} \to 0\right\}\right\}$$

Berechnung y-Koordinaten

In[108]:=

```
ywerte = Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] // Simplify // Numerator
```

vereinfache   Zähler

Out[108]=

$$-\mathrm{Ayy}\,(-1+t)^3 + t\left(3\,\mathrm{Byy}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\mathrm{Cyy} - 2\,\mathrm{Cyy}\,t + \mathrm{Dyy}\,t)\right)$$

In[109]:=

```
yco = CoefficientList[ywerte, t]
```

Liste der Koeffizienten

Out[109]=

$$\{\mathrm{Ayy},\ -3\,\mathrm{Ayy} + 3\,\mathrm{Byy},\ 3\,\mathrm{Ayy} - 6\,\mathrm{Byy} + 4\,\mathrm{Cyy},\ -\mathrm{Ayy} + 3\,\mathrm{Byy} - 4\,\mathrm{Cyy} + 2\,\mathrm{Dyy}\}$$

In[110]:=

```
Eqy = yco == {0, 2 r, 0, 0};
```

In[111]:=

```
soly = Solve[Eqy, {Ayy, Byy, Cyy, Dyy}]
```

löse

Out[111]=

$$\left\{\left\{\mathrm{Ayy} \to 0,\ \mathrm{Byy} \to \frac{2\,r}{3},\ \mathrm{Cyy} \to r,\ \mathrm{Dyy} \to r\right\}\right\}$$

○ Steuerpunkte sind

```
{A = {r, 0}, B = {r, 2/3 r}, Cc = (r/2, r), Dd = {0, r}}
(*Das gerüst ist gespiegelt gegenüber die Buchdarstellung*))
```

$$x[t\_] := \frac{r\,(1 - t^2)}{(1 + t^2)};\; y[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1 + t^2)}$$

● Parameterdarstellung mit rationalen Béziersplines (wie erwartet)

In[112]:=

```
Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] /. solx // Simplify
                                                               vereinfache
```

Out[112]=

$$\left\{\frac{r - r\,t^2}{1 + t^2}\right\}$$

In[113]:=

```
Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] /. soly // Simplify
                                                               vereinfache
```

Out[113]=

$$\left\{\frac{2\,r\,t}{1 + t^2}\right\}$$

In[114]:=

```
{A = {r, 0}, B = {r, 2/3 r}, Cc = {r/2, r}, Dd = {0, r}}
```

Out[114]=

$$\left\{\{r, 0\}, \left\{r, \frac{2\,r}{3}\right\}, \left\{\frac{r}{2}, r\right\}, \{0, r\}\right\}$$

■ Das ist also das Gerüst für Anregung 5.2. mit N2=(-1,0)

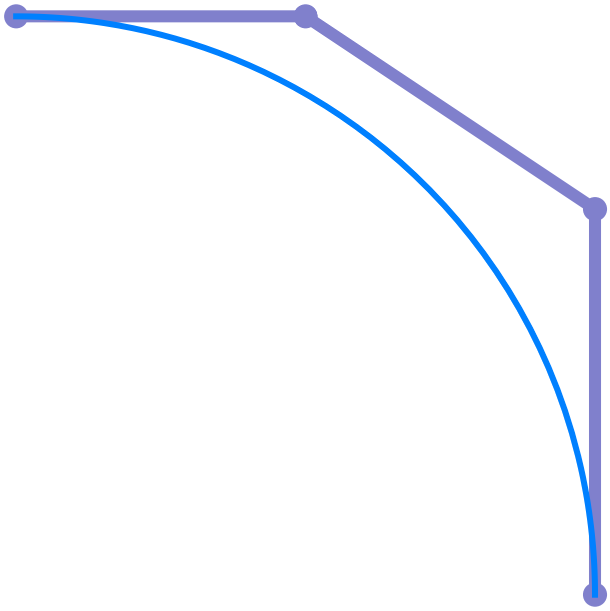
In[ ]:=

```
Viertelkreis = ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. r → 3, {t, 0, 1},
               parametrische Darstellung
   PlotStyle → { RGBColor[0, 0.5, 1], Thickness[0.01]}];
   Darstellungsstil RGB Farbe            Dicke
```

```
r = 3;
Show[Graphics[{Thickness[0.02], PointSize[0.04], RGBColor[0.5, 0.5, 0.8],
   Point[{{r, 0}, {r, 2r/3}, {r/2, r}, {0, r}}], Line[{{r, 0}, {r, 2r/3}, {r/2, r}, {0, r}}]}
  ], Viertelkreis] (*von rechts unten nach links oben*)
r =.
```

zeig··· Graphik Dicke Punktgröße RGB Farbe Punkt Linie

Out[∘]=



GeoGebra-Dateien dazu
echte-Trisektrix--andererKreis.ggb