Höhere Mathematik sehen und verstehen,
Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021

Kreis alternativ mit rationalen Béziersplines

Bernsteinpolynome

In[102]:=
```
b[0, t_] := (1 - t)^3;
b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;
b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t);
b[3, t_] := t^3
```

Herleitung einer Parameterdarst. für den Kreis

Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch einen bekannten Punkt schneidet den Kreis.
Die Steigung t dieser Geraden eignet sich als Parameter.

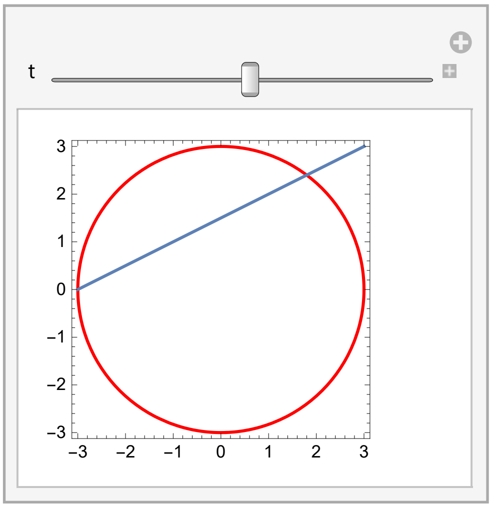
- Kreis $x^2 + y^2 == r^2$

In[114]:=
```
kreis =
  ContourPlot[x^2 + y^2 == 9, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
```
Konturgraphik Seitenverhältnis Konturenstil rot

Die diese Stellung der Geraden sorgt für die alternative Parameterdarstellung

In[276]:=
```
Manipulate[Show[{kreis, Plot[t (x + r) /. r -> 3, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0},
                    Axes -> True, PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}}]}],
  {{t, 0.5}, -10
   , 10}]
```
manipuliere · zeige an · stelle Funktion graphisch dar · Achsenursprung · Achsen · wahr · Koordinatenbereich der Graphik

Out[276]=



{

In[140]:= Solve[$\{x^2 + y^2 == r^2,\ y == t\,(x + r)\}$, {x, y}]
löse

Out[140]= $\left\{\{x \to -r,\ y \to 0\},\ \left\{x \to \frac{r - r\,t^2}{1 + t^2},\ y \to \frac{2\,r\,t}{1 + t^2}\right\}\right\}$

Definition rationaler Bézierspline-Basis

In[ ]:= Rw = .

In[141]:=
```
Rw[i_, t_] := (ww[i] b[i, t]) / Sum[ww[j] b[j, t], {j, 0, 3}];
```
summiere

```
Rw[i, t]
```

Out[142]= $(b[i, t]\ ww[i]) \Big/ \left((1 - t)^3\, ww[0] + 3\,(1 - t)^2\, t\, ww[1] + 3\,(1 - t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]\right)$

Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

$x \to \frac{r - r t^2}{1 + t^2},\ y \to \frac{2 r t}{1 + t^2}$ (*Kreis, Parameterdarst. umgehrt wie in Buch*)

Die Gewichte müssen aus dem Nenner bestimmt werden

In[143]:=
```
nenner = Sum[ww[j] b[j, t], {j, 0, 3}]
```
summiere

Out[143]= $(1-t)^3\,ww[0] + 3\,(1-t)^2\,t\,ww[1] + 3\,(1-t)\,t^2\,ww[2] + t^3\,ww[3]$

In[144]:=
```
CoLi = CoefficientList[nenner, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[144]= {ww[0], -3 ww[0] + 3 ww[1], 3 ww[0] - 6 ww[1] + 3 ww[2], -ww[0] + 3 ww[1] - 3 ww[2] + ww[3]}

In[145]:=
```
Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
```
löse

Out[145]= $\{\{ww[0] \to 1,\ ww[1] \to 1,\ ww[2] \to \frac{4}{3},\ ww[3] \to 2\}\}$

Also sind die Gewichte für den Kreis:

In[149]:= $W = \{1, 1, \frac{4}{3}, 2\};$

In[146]:=
```
w[i_] := W[[i + 1]]
```

In[151]:=
```
nenner = Sum[w[i] b[i, t], {i, 0, 3}] // Simplify  (* wie erwartet*)
```
summiere vereinfache

Out[151]= $1 + t^2$

Vergleich der Bernsteinpolynome mit der rationalen Version

Verwendung der Gewichte auch im Zähler der rationalen Bézierbasis

In[152]:= $R[i\_, t\_] := \frac{w[i]\ b[i, t]}{nenner}$

In[153]:=
```
{R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}
```

Out[153]= $\left\{\frac{(1-t)^3}{1+t^2}, \frac{3\,(1-t)^2\,t}{1+t^2}, \frac{4\,(1-t)\,t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t^3}{1+t^2}\right\}$

Vergleichende Bilder

Steuerpunkte für den Kreis

Punkte (Variabel gelassen)

In[155]:=
```
P = {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
```

Out[155]= {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}

Kreis Parameterdarstellung in dieser Version

In[156]:= $x[t\_] := \frac{r\,(1-t^2)}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1+t^2)};$

Berechnung der Steuerpunkte

Berechnung x-Koordinaten

In[157]:=
```
xwerte = Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[157]= $-\text{Axx}\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,\text{Bxx}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\text{Cxx} - 2\,\text{Cxx}\,t + \text{Dxx}\,t)\right)$

In[158]:=
```
xco = CoefficientList[xwerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[158]= $\{\text{Axx}, -3\,\text{Axx} + 3\,\text{Bxx}, 3\,\text{Axx} - 6\,\text{Bxx} + 4\,\text{Cxx}, -\text{Axx} + 3\,\text{Bxx} - 4\,\text{Cxx} + 2\,\text{Dxx}\}$

In[161]:=
```
Eq = xco == {r, 0, -r , 0};
```

In[162]:=
```
solx = Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```
löse

Out[162]= $\{\{\text{Axx} \to r, \text{Bxx} \to r, \text{Cxx} \to \frac{r}{2}, \text{Dxx} \to 0\}\}$

Berechnung y-Koordinaten

In[163]:=
```
ywerte = Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[163]= $-\text{Ayy}\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,\text{Byy}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\text{Cyy} - 2\,\text{Cyy}\,t + \text{Dyy}\,t)\right)$

In[164]:=
```
yco = CoefficientList[ywerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[164]= $\{\text{Ayy}, -3\,\text{Ayy} + 3\,\text{Byy}, 3\,\text{Ayy} - 6\,\text{Byy} + 4\,\text{Cyy}, -\text{Ayy} + 3\,\text{Byy} - 4\,\text{Cyy} + 2\,\text{Dyy}\}$

In[165]:=
```
Eqy = yco == {0, 2 r, 0, 0};
```

In[166]:=
```
soly = Solve[Eqy, {Ayy, Byy, Cyy, Dyy}]
```
löse

Out[166]= $\{\{\text{Ayy} \to 0, \text{Byy} \to \frac{2\,r}{3}, \text{Cyy} \to r, \text{Dyy} \to r\}\}$

Steuerpunkte sind

In[321]:= $\{A = \{r, 0\}, B = \{r, \frac{2}{3} r\}, Cc = \{\frac{r}{2}, r\}, Dd = \{0, r\}\};$

```
(* C und D sind belegt*)
```
Kons··· leite ab

$x[t\_] := \frac{r\,(1 - t^2)}{(1 + t^2)};\ y[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1 + t^2)}$

Parameterdarstellung mit rationalen Béziersplines (wie erwartet)

In[168]:=
```
Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] /. solx // Simplify
                                                                  vereinfache
```

Out[168]= $\left\{\frac{r - r\,t^2}{1 + t^2}\right\}$

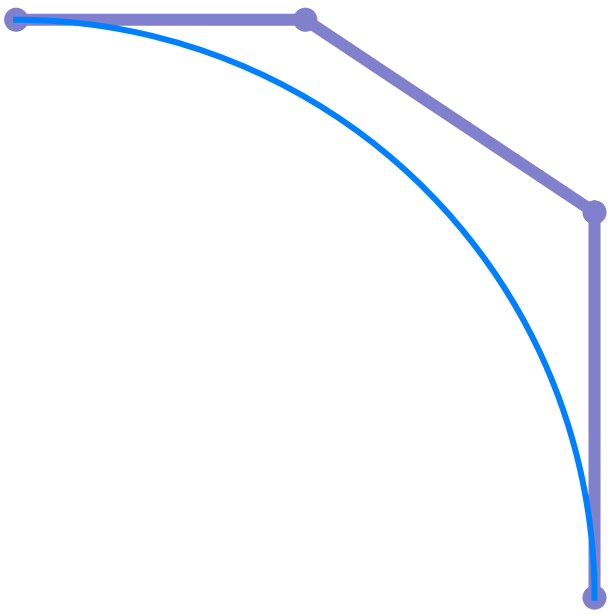
In[169]:=
```
Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] /. soly // Simplify
                                                                  vereinfache
```

Out[169]= $\left\{\frac{2\,r\,t}{1 + t^2}\right\}$

In[271]:=
```
Viertelkreis = ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. r → 3, {t, 0, 1},
               parametrische Darstellung
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.5, 1], Thickness[0.01]}];
   Darstellungsstil RGB Farbe          Dicke
```

In[322]:=
```
r = 3;
Show[Graphics[{Thickness[0.02], PointSize[0.04],
zeig·· Graphik  Dicke            Punktgröße
   RGBColor[0.5, 0.5, 0.8], Point[{A, B, Cc, Dd}], Line[{A, B, Cc, Dd}]}
   RGB Farbe                Punkt                   Linie
 ], Viertelkreis]
r =.
```

Out[323]=



GeoGebra-Dateien dazu

echte-Trisektrix-andererKreis.ggb