Höhere Mathematik sehen und verstehen,
Haftendorn, Riebesehl, Aug. 2021

Kreis wie im Buch mit rationalen Béziersplines

Bernsteinpolynome

In[102]:=
```
b[0, t_] := (1 - t)^3;
b[1, t_] := 3 t (1 - t)^2;
b[2, t_] := 3 t^2 (1 - t);
b[3, t_] := t^3
```

Herleitung einer Parameterdarst. für den Kreis

Vorgehen: Eine beliebige Gerade durch einen bekannten Punkt schneidet den Kreis.
Die Steigung t dieser Geraden eignet sich als Parameter.

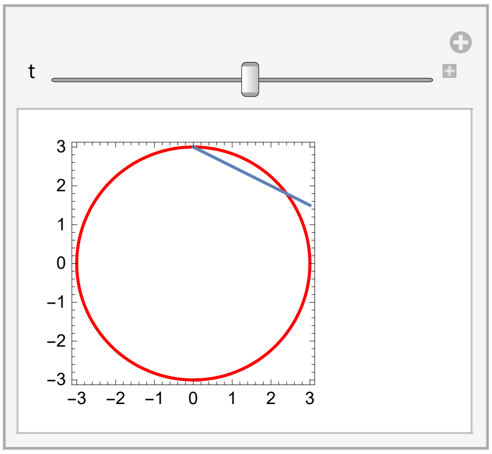
- Kreis $x^2 + y^2 == r^2$

In[114]:=
```
kreis = ContourPlot[x^2 + y^2  == 9, {x, -3, 3},
        Konturgraphik
    {y, -3, 3}, AspectRatio → 1, ContourStyle → {Red}];
               Seitenverhältnis     Konturenstil      rot
```

Die diese Stellung der Geraden sorgt für die Parameterdarstellung aus dem Buch

In[277]:=
```
Manipulate[Show[{kreis, Plot[r - t x /. r -> 3, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0},
manipuliere  zeige an    stelle Funktion graphisch dar            Achsenursprung
    Axes -> True, PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 3}}]}],
    Achsen  wahr   Koordinatenbereich der Graphik
  {{t, 0.5}, -10
  , 10}]
```

Out[277]=




```
{
```

In[278]:= Solve$[\{x^2 + y^2 == r^2,\ y == r - t\,x\}, \{x, y\}]$
löse

Out[278]= $\left\{\{x \to 0,\ y \to r\},\ \left\{x \to \frac{2\,r\,t}{1+t^2},\ y \to \frac{r - r\,t^2}{1+t^2}\right\}\right\}$

■ Definition rationaler Bézierspline-Basis

In[∘]:=
```
Rw =.
```

In[141]:=
```
Rw[i_, t_] := (ww[i] b[i, t]) / Sum[ww[j] b[j, t], {j, 0, 3}];
                                summiere
Rw[i, t]
```

Out[142]= $(b[i, t]\ ww[i]) \big/ \left((1-t)^3\, ww[0] + 3\,(1-t)^2\, t\, ww[1] + 3\,(1-t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]\right)$

■ Bestimmung der Gewichte aus der Parameterdarstellung

$x \to \frac{2rt}{1+t^2}$, $y \to \frac{r - rt^2}{1+t^2}$ (*Kreis, Parameterdarst. wie im Buch*)

Die Gewichte müssen aus dem Nenner bestimmt werden

In[143]:=
```
nenner = Sum[ww[j] b[j, t], {j, 0, 3}]
         summiere
```

Out[143]= $(1-t)^3\, ww[0] + 3\,(1-t)^2\, t\, ww[1] + 3\,(1-t)\, t^2\, ww[2] + t^3\, ww[3]$

```
In[144]:= CoLi = CoefficientList[nenner, t]
            Liste der Koeffizienten
Out[144]= {ww[0], -3 ww[0] + 3 ww[1], 3 ww[0] - 6 ww[1] + 3 ww[2], -ww[0] + 3 ww[1] - 3 ww[2] + ww[3]}

In[145]:= Solve[CoLi == {1, 0, 1, 0}, {ww[0], ww[1], ww[2], ww[3]}]
          löse
```

Out[145]= $\left\{\left\{ww[0] \to 1,\ ww[1] \to 1,\ ww[2] \to \frac{4}{3},\ ww[3] \to 2\right\}\right\}$

Also sind die Gewichte für den Kreis:

In[149]:= $W = \left\{1, 1, \frac{4}{3}, 2\right\};$

```
In[146]:= w[i_] := W[[i + 1]]

In[151]:= nenner = Sum[w[i] b[i, t], {i, 0, 3}] // Simplify (* wie erwartet*)
                   summiere                          vereinfache
```

Out[151]= $1 + t^2$

Vergleich der Bernsteinpolynome mit der rationalen Version

Verwendung der Gewichte auch im Zähler der rationalen Bézierbasis

In[152]:= $R[i\_, t\_] := \frac{w[i]\, b[i, t]}{nenner}$

```
In[153]:= {R[0, t], R[1, t], R[2, t], R[3, t]}
```

Out[153]= $\left\{\frac{(1-t)^3}{1+t^2}, \frac{3\,(1-t)^2\,t}{1+t^2}, \frac{4\,(1-t)\,t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t^3}{1+t^2}\right\}$

Vergleichende Bilder

Steuerpunkte für den Kreis

Punkte (Variabel gelassen)

```
In[155]:= P = {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
Out[155]= {{Axx, Ayy}, {Bxx, Byy}, {Cxx, Cyy}, {Dxx, Dyy}}
```

Kreis Parameterdarstellung in der im Buch

In[279]:= $x[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{r\,(1-t^2)}{(1+t^2)};$

Berechnung der Steuerpunkte

Berechnung x-Koordinaten

In[280]:=
```
xwerte = Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[280]= $-\text{Axx}\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,\text{Bxx}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\text{Cxx} - 2\,\text{Cxx}\,t + \text{Dxx}\,t)\right)$

In[281]:=
```
xco = CoefficientList[xwerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[281]= {Axx, −3 Axx + 3 Bxx, 3 Axx − 6 Bxx + 4 Cxx, −Axx + 3 Bxx − 4 Cxx + 2 Dxx}

In[282]:=
```
Eq = xco == {0, 2 r, 0 , 0};
```

In[283]:=
```
solx = Solve[Eq, {Axx, Bxx, Cxx, Dxx}]
```
löse

Out[283]= $\left\{\left\{\text{Axx} \to 0,\ \text{Bxx} \to \frac{2\,r}{3},\ \text{Cxx} \to r,\ \text{Dxx} \to r\right\}\right\}$

Berechnung y-Koordinaten

In[284]:=
```
ywerte = Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] // Simplify // Numerator
```
vereinfache Zähler

Out[284]= $-\text{Ayy}\,(-1+t)^3 + t\,\left(3\,\text{Byy}\,(-1+t)^2 + 2\,t\,(2\,\text{Cyy} - 2\,\text{Cyy}\,t + \text{Dyy}\,t)\right)$

In[286]:=
```
yco = CoefficientList[ywerte, t]
```
Liste der Koeffizienten

Out[286]= {Ayy, −3 Ayy + 3 Byy, 3 Ayy − 6 Byy + 4 Cyy, −Ayy + 3 Byy − 4 Cyy + 2 Dyy}

In[285]:=
```
Eqy = yco == {r, 0, -r, 0};
```

In[287]:=
```
soly = Solve[Eqy, {Ayy, Byy, Cyy, Dyy}]
```
löse

Out[287]= $\left\{\left\{\text{Ayy} \to r,\ \text{Byy} \to r,\ \text{Cyy} \to \frac{r}{2},\ \text{Dyy} \to 0\right\}\right\}$

Steuerpunkte sind

In[315]:= $\left\{A = \{0, r\},\ B = \left\{\frac{2}{3} r, r\right\},\ Cc = \left\{r, \frac{r}{2}\right\},\ Dd = \{r, 0\}\right\}$
```
(* C und D sind belegt*)
```
Kons··· leite ab

Out[315]= $\left\{\{0, r\}, \left\{\frac{2\,r}{3}, r\right\}, \left\{r, \frac{r}{2}\right\}, \{r, 0\}\right\}$

In[290]:= $x[t\_] := \frac{2\,r\,t}{(1+t^2)};\ y[t\_] := \frac{r\,(1-t^2)}{(1+t^2)}$

In[314]:=
```
Dd
```

Out[314]= {0, r}

● Parameterdarstellung mit rationalen Béziersplines (wie erwartet)

In[291]:=
```
Axx R[0, t] + Bxx R[1, t] + Cxx R[2, t] + Dxx R[3, t] /. solx // Simplify
```
vereinfache

Out[291]= $\left\{\frac{2\,r\,t}{1+t^2}\right\}$

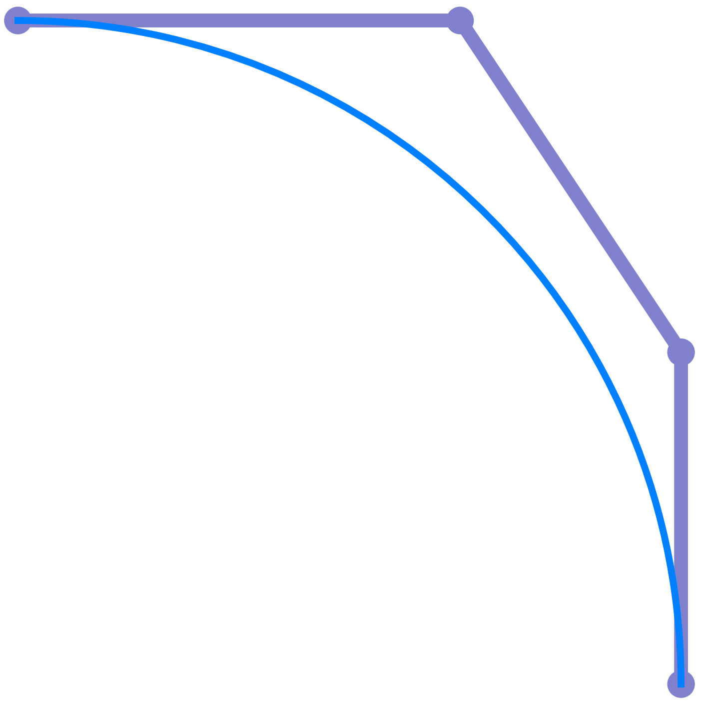
In[292]:=
```
Ayy R[0, t] + Byy R[1, t] + Cyy R[2, t] + Dyy R[3, t] /. soly // Simplify
```
vereinfache

Out[292]= $\left\{\frac{r-r\,t^2}{1+t^2}\right\}$

In[293]:=
```
Viertelkreis = ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. r → 3, {t, 0, 1},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0.5, 1], Thickness[0.01]}];
```
parametrische Darstellung; Darstellungsstil; RGB Farbe; Dicke

In[316]:=
```
r = 3;
Show[Graphics[{Thickness[0.02], PointSize[0.04],
   RGBColor[0.5, 0.5, 0.8], Point[{A, B, Cc, Dd}], Line[{A, B, Cc, Dd}]}
 ], Viertelkreis]
r =.
```
zeig··; Graphik; Dicke; Punktgröße; RGB Farbe; Punkt; Linie

Out[317]=



■ GeoGebra-Dateien dazu echte-Trisektrix-Kreis.ggb