

■ Lösung einer DGL mit Laplace



■ Lösung einer DGL (mit $a = +\frac{1}{5}$)

Verwendung der Mathematica-Funktionen

- DGL: $y' [t] == y [t] + \text{Cos} [t] e^{\frac{1}{5}t}$, $y[0] == k$.

Laplace-Transformation

```
In[*]:= eq = LaplaceTransform[y' [t] == y [t] + Cos [t] e^{\frac{1}{5}t}, t, s] /.  
      {LaplaceTransform[y [t], t, s] -> Y [s], y [0] -> k}
```

$$\text{Out[*]} = -k + s Y [s] == \frac{-\frac{1}{5} + s}{1 + \left(-\frac{1}{5} + s\right)^2} + Y [s]$$

Auflösung nach Y[s]

```
In[*]:= sol = Solve [eq, Y [s]]
```

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ Y [s] \rightarrow \frac{-5 + 26 k + 25 s - 10 k s + 25 k s^2}{(-1 + s) (26 - 10 s + 25 s^2)} \right\} \right\}$$

○ Nebenrechnung

```
In[*]:= solTermSolo = \frac{-5 + 25 s}{26 + 5 s (-2 + 5 s)};
```

```
In[*]:= Solo = \frac{\left(s - \frac{1}{5}\right)}{1 + \left(s - \frac{1}{5}\right)^2};
```

```
In[*]:= solTermSolo - Solo // FullSimplify
```

0 (* Rechnung bestätigt*)

```
In[*]:= \frac{(k + solTermSolo)}{s - 1} // Expand // Simplify
```

$$\text{Out[*]} = (-5 + 25 s + k (26 - 10 s + 25 s^2)) / ((-1 + s) (26 - 10 s + 25 s^2))$$

Ende Prüfung der anderen Schreibweisen

○ Weiter mit Laplace-Lösung

In[*]:= sol = sol // Apart

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ Y[s] \rightarrow \frac{20 + 41 k}{41 (-1 + s)} - \frac{25 (-29 + 20 s)}{41 (26 - 10 s + 25 s^2)} \right\} \right\}$$

Umkehrtransformation

In[*]:= InverseLaplaceTransform[Y[s] /. sol[[1]], s, t] // FullSimplify

$$\text{Out[*]} = \frac{1}{41} \left(e^t (20 + 41 k) - 5 e^{t/5} (4 \cos[t] - 5 \sin[t]) \right)$$

● Lösung der DGL mit dem eingebauten Kommando

In[*]:= sold = DSolve[{y'[t] == y[t] + Cos[t] e^{1/5 t}, y[0] == k}, y[t], t]

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ y[t] \rightarrow \frac{1}{41} e^{t/5} (20 e^{4t/5} + 41 e^{4t/5} k - 20 \cos[t] + 25 \sin[t]) \right\} \right\}$$

Versuch, die gleiche algebraische Form wie im vorigen Teil herzustellen.

In[*]:= y[t] /. sold[[1]] // FullSimplify // Expand

$$\text{Out[*]} = \frac{20 e^t}{41} + e^t k - \frac{20}{41} e^{t/5} \cos[t] + \frac{25}{41} e^{t/5} \sin[t]$$

○ Lösung, die durch A=(ax,ay) verläuft:

In[*]:= g1 = ay == $\frac{1}{41} e^{t/5} (20 e^{4t/5} + 41 e^{4t/5} k - 20 \cos[t] + 25 \sin[t])$ /. t -> ax

$$\text{Out[*]} = ay == \frac{1}{41} e^{ax/5} (20 e^{4ax/5} + 41 e^{4ax/5} k - 20 \cos[ax] + 25 \sin[ax])$$

In[*]:= Solve[g1, k]

$$\text{Out[*]} = \left\{ \left\{ k \rightarrow -\frac{1}{41} e^{-ax} (-41 ay + 20 e^{ax} - 20 e^{ax/5} \cos[ax] + 25 e^{ax/5} \sin[ax]) \right\} \right\}$$

● DGL: $y'[t] == y[t] + \cos[t] e^{-\frac{1}{5}t}$, $y[0] == k$.

● Lösung der DGL mit dem eingebauten Kommando