Parallelprojektion eines Hyperkubus

... in Richtung von Vektor a auf eine senkrechte Ebene zu a:

```
a = {a1, a2, a3, a4};
```

Diese Matrix enthält drei orthogonale Vektoren senkrecht zu a

$$A = \begin{pmatrix} -a2 & 0 & (a3^2 + a4^2)\ a1 \\ a1 & 0 & (a3^2 + a4^2)\ a2 \\ 0 & -a4 & -(a1^2 + a2^2)\ a3 \\ 0 & a3 & -(a1^2 + a2^2)\ a4 \end{pmatrix};$$

Wir müssen aber normieren:

```
(A = Simplify[(#/Norm[#] & /@ Aᵀ), a1 > 0 ∧ a2 > 0 ∧ a3 > 0 ∧ a4 > 0] // PowerExpand //
    Transpose) // MatrixForm
```

vereinfache · multipliziere Potenze · transponiere · Matritzenform

$$\begin{pmatrix} -\frac{a2}{\sqrt{a1^2+a2^2}} & 0 & \frac{a1\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}} \\ \frac{a1}{\sqrt{a1^2+a2^2}} & 0 & \frac{a2\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}} \\ 0 & -\frac{a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}} & -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\ a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}} \\ 0 & \frac{a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}} & -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\ a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix projiziert auf die von A aufgespannte Hyperebene

```
P = A.Inverse[Aᵀ.A].Aᵀ // Simplify
```

inverse Matrix · vereinfache

$$\Big\{\Big\{\frac{a2^2+a3^2+a4^2}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a1\,a2}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a1\,a3}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a1\,a4}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}\Big\},$$
$$\Big\{-\frac{a1\,a2}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, \frac{a1^2+a3^2+a4^2}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a2\,a3}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a2\,a4}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}\Big\},$$
$$\Big\{-\frac{a1\,a3}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a2\,a3}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, \frac{a1^2+a2^2+a4^2}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a3\,a4}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}\Big\},$$
$$\Big\{-\frac{a1\,a4}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a2\,a4}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, -\frac{a3\,a4}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}, \frac{a1^2+a2^2+a3^2}{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}\Big\}\Big\}$$

Dies sind die projizierten Punkte aus den Einheitsvektoren, 4 Punkte des projizierten Hyperkubus. Vorausgesetzt ist, dass a normiert ist.

```
(Punkte = P.DiagonalMatrix[{1, 1, 1, 1}] /. a1² + a2² + a3² + a4² → 1 // Simplify) //
            Diagonalmatrix                                            vereinfache
 MatrixForm
 Matritzenform
```

$$\begin{pmatrix} a2^2+a3^2+a4^2 & -a1\,a2 & -a1\,a3 & -a1\,a4 \\ -a1\,a2 & a1^2+a3^2+a4^2 & -a2\,a3 & -a2\,a4 \\ -a1\,a3 & -a2\,a3 & a1^2+a2^2+a4^2 & -a3\,a4 \\ -a1\,a4 & -a2\,a4 & -a3\,a4 & a1^2+a2^2+a3^2 \end{pmatrix}$$

Darstellung in Koordinaten der Hyperebene senkrecht zu a

```
P = Inverse[Aᵀ.A].Aᵀ // Simplify
    inverse Matrix     vereinfache
```

$$\left\{\left\{-\frac{a2}{\sqrt{a1^2+a2^2}}, \frac{a1}{\sqrt{a1^2+a2^2}}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}}, \frac{a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}}\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{a1\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}}, \frac{a2\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}},\right.$$
$$\left.\left. -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\,a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}}, -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\,a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}\sqrt{a1^2+a2^2+a3^2+a4^2}}\right\}\right\}$$

Dies sind die projizierten Punkte aus den Einheitsvektoren, 4 Punkte des projizierten Hyperkubus. Vorausgesetzt ist, dass a normiert ist.

```
(Punkte = P.DiagonalMatrix[{1, 1, 1, 1}] /. a1² + a2² + a3² + a4² → 1 // Simplify) //
            Diagonalmatrix                                            vereinfache
 MatrixForm
 Matritzenform
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{a2}{\sqrt{a1^2+a2^2}} & \frac{a1}{\sqrt{a1^2+a2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}} & \frac{a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}} \\ \frac{a1\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}} & \frac{a2\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}} & -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\,a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}} & -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\,a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}} \end{pmatrix}$$

Einzelpunkte, denn wir brauchen noch deren Summen:

```
{e1, e2, e3, e4} = Punkteᵀ
```

$$\left\{\left\{-\frac{a2}{\sqrt{a1^2+a2^2}}, 0, \frac{a1\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}}\right\}, \left\{\frac{a1}{\sqrt{a1^2+a2^2}}, 0, \frac{a2\sqrt{a3^2+a4^2}}{\sqrt{a1^2+a2^2}}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{0, -\frac{a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}}, -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\,a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}}\right\}, \left\{0, \frac{a3}{\sqrt{a3^2+a4^2}}, -\frac{\sqrt{a1^2+a2^2}\,a4}{\sqrt{a3^2+a4^2}}\right\}\right\}$$

```
e0 = {0, 0, 0};
```

Geschickte Reihenfolge für die Hyperkubus-Punkte (alle Summen von e1, e2, e3 und e4), so dass der Linienzug vollständig ist:

```
Hyperkubus = {e0, e1, e1 + e2, e2, e0, e3, e2 + e3, e1 + e2 + e3, e1 + e3,
   e3, e3 + e4, e2 + e3 + e4, e2 + e3, e2, e2 + e4, e2 + e3 + e4, e1 + e2 + e3 + e4,
   e1 + e2 + e3, e1 + e2, e1 + e2 + e4, e1 + e2 + e3 + e4, e1 + e3 + e4, e1 + e3, e1,
   e1 + e4, e1 + e3 + e4, e3 + e4, e4, e1 + e4, e1 + e2 + e4, e2 + e4, e4, e0};

Length[Hyperkubus]
Länge
```

33

Dies ist die “Leuphana”-Lage

```
v = {1, 1, 1, 1};

v = {1, 1, 1, 2};

v = {1, 1, 2, 2};

v = {1, 1, 1, 0};

v = {1, 1, 1, 1};
```

$$\text{Thread}\left[\{a1, a2, a3, a4\} \to \frac{v}{\text{Norm}[v]}\right]$$

fädle auf

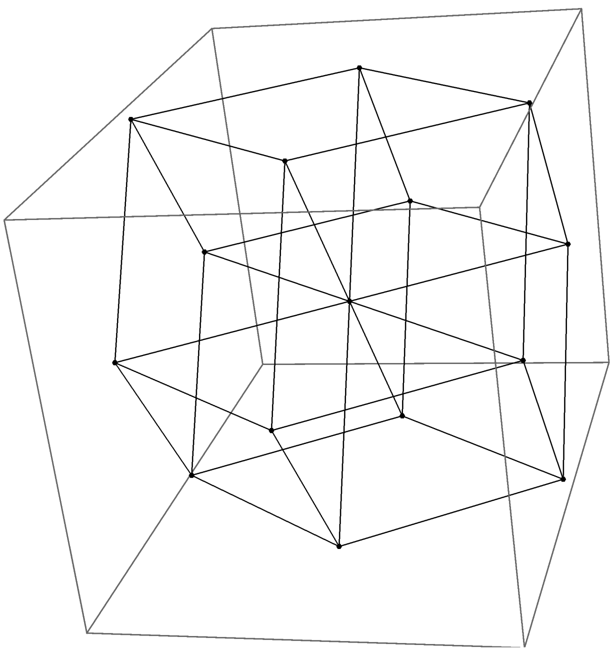
$$\left\{a1 \to \frac{1}{2},\ a2 \to \frac{1}{2},\ a3 \to \frac{1}{2},\ a4 \to \frac{1}{2}\right\}$$

$$\text{raw} = \text{Hyperkubus} \ /.\ \text{Thread}\left[\{a1, a2, a3, a4\} \to \frac{v}{\text{Norm}[v]}\right];$$

fädle auf

```
points = Point[#] & /@ raw;
         Punkt

Graphics3D[{points, Line[raw]}]
3D-Graphik           Linie
```



```
axes = {e1, e2, e3, e4} /. Thread[{a1, a2, a3, a4} -> v/Norm[v]]
```
fädle auf

$$\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

```
Graphics3D[Line[{{0, 0, 0}, #}] & /@ axes]
```
3D−Graphik Linie