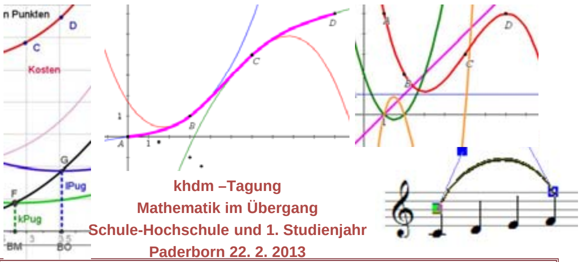
LEUPHANA
UNIVERSITÄT LÜNEBURG

# Vielfältige Anwendungen des Begriffs „Basis“ in Vektorräumen




**khdm –Tagung**
**Mathematik im Übergang**
**Schule-Hochschule und 1. Studienjahr**
**Paderborn 22. 2. 2013**



## CURRICULUM VITAE

1966 Abitur in Hameln

TU Clausthal, Studium

1971 1. Staatsex. Gym. LA Mathe/Physik

1972 Diplom Mathematik

1975 Promotion Mathematik (Algbra,Halbringe)

2. Staatsex. Gym. LA Mathe/Physik

30 Jahre XXX

Johanneum Lüneburg 2002

1991 Ingenieur-Mathematik FH dann Leuphana 2008

1993 Lehrerbildung Fachgymnasium Mathematik Uni Lüneburg Leuphana 2013

2007 Mathematik für alle Leuphana

20 Jahre XX

Fazit

Mathematik verstehen



## “Die Basis verstehen ist Basis zum Verstehen”

Vorbemerkungen

khdm kompetenzzentrum hochschuldidaktik mathematik

**Querschnittsarbeitsgruppen**
**QAG1** Methoden und Instrumente empirischer Lehr-Lern-Forschung

**QAG2 Fachdidaktische Analyse und Aufbereitung mathematischen Wissens**

**QAG3** Hochschuldidaktische Lehr-Lernmethoden

**QAG4** eLearning und **digitale Medien in der mathematischen Hochschulausbildung**

Einordnung

Veranstaltung: **Lineare Algebra** oder: **Grundelemente der Höheren Mathematik**

vorausgegangen: Vektorraum , Linear unabhängig, Basis

übliche Beispiele für Vektorräume, darunter VR(n) der Polynome bis zum Grad n mit der Standardbasis $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

Nun gleich anschießend zur „Bereicherung“: was nun folgt:



## “Die Basis verstehen ist Basis zum Verstehen”

Vorbemerkungen

Mein Hintergrund und mein Beitrag zur „Stoffdidaktik“

Interpolation
- Lagrange- und Newton-Interpolation Wirtschaftsanwendung
- Basen angepasst an Datenpunkte

Splines
- Kubische Splines Schiffbau-Beispiel
- Bézier-Splines Design
- Jedem Polynom seine Basis angepasst an einen Datenpunkt
- Bernsteinpolynome

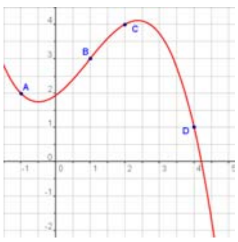
Differenzialgleichungen
- DGL mit konstanten Koeffizienten
- VR der Störfunktion

Fazit



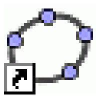
## Polynombasis nach Lagrange

**Datenpunkte**




Gegeben sind Datenpunkte

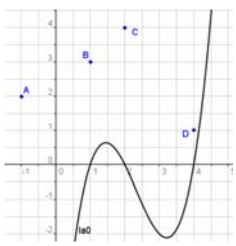
Gesucht ist das Interpolationspolynom





## Polynombasis nach Lagrange

**Datenpunkte**



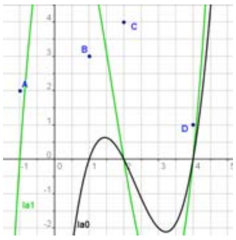

1. Basispolynom

$$L_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom

## Polynombasis nach Lagrange

**Datenpunkte**



1. Basispolynom

$$L_1(x)=(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

2. Basispolynom

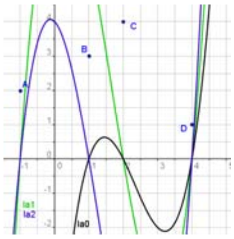
$$L_2(x)=(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom



## Polynombasis nach Lagrange

**Datenpunkte**



1. 2. und 3. Basispolynom

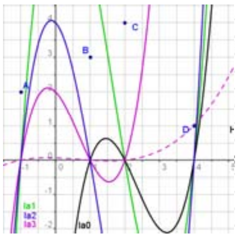
$$L_1(x)=(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$L_2(x)=(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$L_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)$$

Gesucht ist das Interpolationspolynom



## Polynombasis nach Lagrange

**Datenpunkte**



1. 2. 3. und 4. Basispolynom

$$L_1(x)=(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$L_2(x)=(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$L_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)$$
$$L_4(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

**Die Lagrange-Basispolynome sind linear unabhängig.**

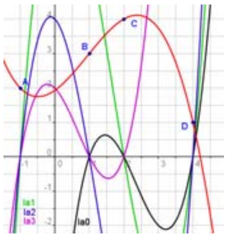
**Der Vektorraum der Polynome bis zum 3. Grad hat die Dimension 4.**

**Sie werden nun so gestreckt, dass sie den Stützpunkt erreichen, an dessen Abszisse sie keine Nullstelle haben.**



## Polynombasis nach Lagrange

**Datenpunkte**



1. 2. 3. und 4. Basispolynom

$$L_1(x)=(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$L_2(x)=(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$L_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)$$
$$L_4(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Und daraus entsteht das Interpolationspolynom **als Linearkombination**

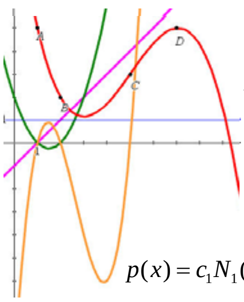
$$p(x)=c_1L_1(x)+c_2L_2(x)+c_3L_3(x)+c_4L_4(x)$$



## Polynombasis nach Newton

**Datenpunkte**

$$N_1(x)=1$$
$$N_2(x)=(x-x_1)$$
$$N_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)$$
$$N_4(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$



Sie sind linear unabhängig.
Damit sind sie eine Basis.

Und daraus entsteht das Interpolationspolynom

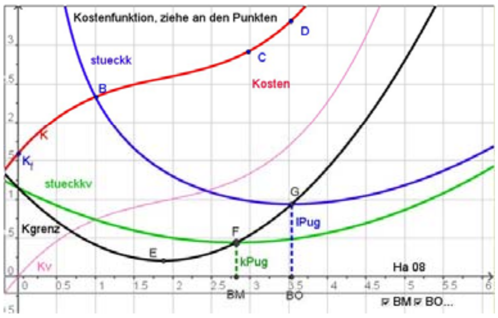
**als Linearkombination**

$$p(x)=c_1N_1(x)+c_2N_2(x)+c_3N_3(x)+c_4N_4(x)$$



## Wirtschaftsfunktionen

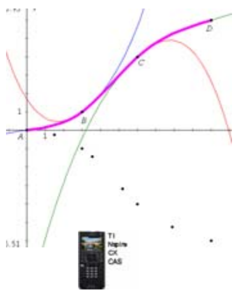
**Modellierung der Kostenfunktion**




!!!!!!!!!!!
Welch kleine Variation von D,… so viel für die Interpretation bewirkt.
!!!!!!

# Splines

Modellierung im Design





# Kubische Splines

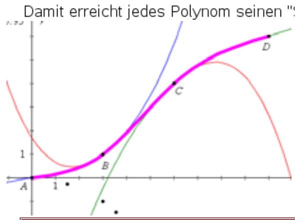
Modellierung im Design

$\mathbf{p0}(x):=\mathrm{apy}+b0\cdot(x-\mathrm{apx})+\mathrm{c0}\cdot(x-\mathrm{apx})^2+d0\cdot(x-\mathrm{apx})^3$ ▸ *Fertig* Durch (apx, apy)

$\mathbf{p1}(x):=\mathrm{bpy}+b1\cdot(x-\mathrm{bpx})+c1\cdot(x-\mathrm{bpx})^2+d1\cdot(x-\mathrm{bpx})^3$ ▸ *Fertig* Durch (bpx, bpy)

$\mathbf{p2}(x):=\mathrm{cpy}+b2\cdot(x-\mathrm{cpx})+c2\cdot(x-\mathrm{cpx})^2+d2\cdot(x-\mathrm{cpx})^3$ ▸ *Fertig* Durch (cpx, cpy)

Damit erreicht jedes Polynom seinen "Startnagel". Gegeben sind n+1 Punkte.

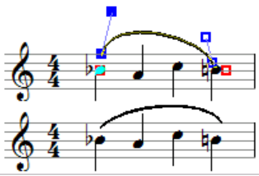


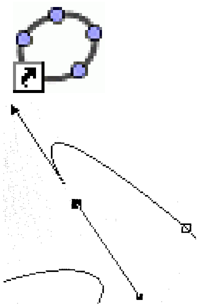
Jedes der n Polynome wird in einer **eigenen Basis** dargestellt, die an das **Problem angepasst** ist.
Das ermöglicht eine übersichtliche Formulierung der Bedingungen:
An den Nägeln sind Werte, Steigungen und Krümmungen gleich.



# Bézier-Splines

Datenpunkte und Steuerpunkte



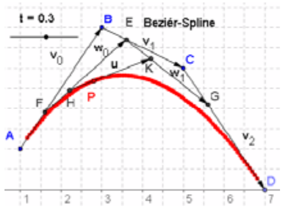


- Notenbogen in Capella
- Kurvenwerkzeug im Malprogramm
- Hilfsmittel der Schriftdesigner
- ..........



# Bézier-Splines

## Datenpunkte und Steuerpunkte




Teilungspunkt stets an der t-Stelle des Vektors.

t läuft von 0 bis 1.

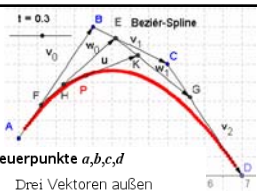
Der Ort von P ist der Bézier-Spline

Beweis mit einem vektoriellen Ansatz



# Bézier-Splines

## .....Beweis



**Bézier−Spline ,vektorielle Konstruktion: 4 Steuerpunkte** $a,b,c,d$

$\mathbf{v0}:=b-a$ ▸ $b-a$ $\mathbf{v1}:=c-b$ ▸ $c-b$ $\mathbf{v2}:=d-c$ ▸ $d-c$ Drei Vektoren außen

*drei Punkte f, e g auf den t−Teilungsstellen*

$\mathbf{f}:=a+t\cdot\mathbf{v0}$ ▸ $(b-a)\cdot t+a$ $\mathbf{e}:=b+t\cdot\mathbf{v1}$ ▸ $(c-b)\cdot t+b$ $\mathbf{g}:=c+t\cdot\mathbf{v2}$ ▸ $(d-c)\cdot t+c$

$\mathbf{w0}:=\mathbf{e}-\mathbf{f}$ ▸ $(a-2\cdot b+c)\cdot t-a+b$ $\mathbf{w1}:=\mathbf{g}-\mathbf{e}$ ▸ $(b-2\cdot c+d)\cdot t-b+c$ dann zwei Vektoren

*zwei Punkte k und h auf den t−Teilungsstellen*

$\mathbf{h}:=\mathbf{f}+t\cdot\mathbf{w0}$ ▸ $(a-2\cdot b+c)\cdot t^2-2\cdot(a-b)\cdot t+a$ $\mathbf{k}:=\mathbf{e}+t\cdot\mathbf{w1}$ ▸ $(b-2\cdot c+d)\cdot t^2-2\cdot(b-c)\cdot t+b$

$\mathbf{u}:=\mathbf{k}-\mathbf{h}$ ▸ $(-a+3\cdot b-3\cdot c+d)\cdot t^2+(2\cdot a-4\cdot b+2\cdot c)\cdot t-a+b$ dann ein letzter Vektor

*ein Punkt p auf der t−Teilungsstelle*

$\mathbf{p}:=\mathbf{h}+t\cdot\mathbf{u}$ ▸ $-(a-3\cdot b+3\cdot c-d)\cdot t^3+3\cdot(a-2\cdot b+c)\cdot t^2-3\cdot(a-b)\cdot t+a$

**Vektorgleichung, sortieren nach Punkten a,b,c,d**



# Bézier-Splines

mit Bernsteinpolynomen

$\mathbf{bern0}(t):=\mathrm{factor}(\mathbf{p}|a=1 \text{ and } b=0 \text{ and } c=0 \text{ and } d=0)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{bern0}(t)$ ▸ $-(t-1)^3$

$\mathbf{bern1}(t):=\mathrm{factor}(\mathbf{p}|a=0 \text{ and } b=1 \text{ and } c=0 \text{ and } d=0)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{bern1}(t)$ ▸ $3\cdot t\cdot(t-1)^2$

$\mathbf{bern2}(t):=\mathrm{factor}(\mathbf{p}|a=0 \text{ and } b=0 \text{ and } c=1 \text{ and } d=0)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{bern2}(t)$ ▸ $-3\cdot t^2\cdot(t-1)$

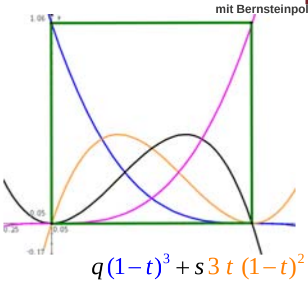
$\mathbf{bern3}(t):=\mathrm{factor}(\mathbf{p}|a=0 \text{ and } b=0 \text{ and } c=0 \text{ and } d=1)$ ▸ *Fertig* $\mathbf{bern3}(t)$ ▸ $t^3$

**Das sind die vier Bernsteinpolynome.**

$B_0(t)=(1-t)^3$ $\quad B_1(t)=3\,t\,(1-t)^2$

$B_2(t)=3t^2(1-t)$ $\quad B_3(t)=\ t^3$

## Bézier-Splines
mit Bernsteinpolynomen



Vier Bernsteinpolynome

$B_0(t) = \quad (1-t)^3$

$B_1(t) = 3\,t\,(1-t)^2$

$B_2(t) = 3t^2(1-t)$

$B_3(t) = \quad t^3$

$$q\,(1-t)^3 + s\,3\,t\,(1-t)^2 + r\,3t^2(1-t) + v\,t^3 \equiv 0$$

Sie sind linear unabhängig.

**Sie bilden eine Basis**

**im VR der Polynome** (bis Grad 3).

$B_0$ und $B_1$ sind wegen der Nullstellen unabhängig von den anderen.
$B_2$ und $B_3$ können auch nicht zum Nullpolynom kombiniert werden , denn t=1/3 und t=2/3 erzwingen in 2 $B_2$ +r $B_3$ =0 das System s4+2r=0 und 2s+4r=0



## Bézier-Splines
mit Bernsteinpolynomen

Aus den Bernsteinpolynomen entsteht das Interpolationspolynom in Parameterdarstellung

$$x(t) := ax \cdot B_0(t) + bx \cdot B_1(t) + cx \cdot B_2(t) + dx \cdot B_3(t)$$

$$y(t) := ay \cdot B_0(t) + by \cdot B_1(t) + cy \cdot B_2(t) + dy \cdot B_3(t)$$

**als Linearkombination**

**direkt aus den Steuerpunkten**




## Differenzialgleichungen

**Ansatz für spezielle Lösung:**

**Suche Basis im Vektorraum der Störfunktion** (und ihrer Ableitungen)

$$y'' + k\ y' + m\,y = g(x)$$

$g(x) = x \qquad G(x) = a + b\ x$

$g(x) = x^2 \qquad G(x) = a + b\ x + c\,x^2$

$g(x) = \sin(2x) \quad G(x) = a\ \sin(2x) + b\ \cos(2x)$

**So ergiebig sind die Begriffe Basis und Dimension**



Fazit

Anfangs versprach ich:

Nun gleich anschließend zur „Bereicherung":

Dies war nun mein Vorschlag.

## Warum sollte man den Begriff “Basis” reichhaltig lehren?

| | |
|---|---|
| Mathematische Begründung | Die **Vernetzung** der Themen ist essentiell für die Mathematik. Wenn man sie ans Ende einer Ausbildung stellt, kann sie ihre prägende Kraft nicht mehr entfalten. |
| Erkenntnistheoretische Begründung | Für abstrakte Begriffe müssen „**Wirklichkeiten**" vorgestellt werden, von denen die Begriffe abstrahiert=weggezogen werden können. Mindesten müssen sie **zum Tragen** kommen. |
| Lernpsychologische Begründung | Ohne **Akzeptanz und Neugier** kann kein Lernen statt-finden. Eine reichhaltige Einbindung eröffnet **Perspektiven** und bietet Identifizierungsmöglichkeit. Das gilt umso mehr, wenn **Interaktionen** ermöglicht werden. |
| Pragmatische Anmerkung | Auch für die Hochschulmathematik sollte ein **Spiralcurriculum** entwickelt werden. |



Vielen Dank
für Ihre
Aufmerksamkeit!

Sie finden alles bei
www.mathematik-verstehen.de
Bereiche Numerik und Lineare Algebra


Spektrum Akademischer Verlag /Springer
ISBN 978 8274 2044 2
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de