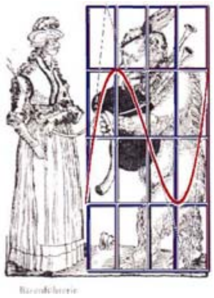
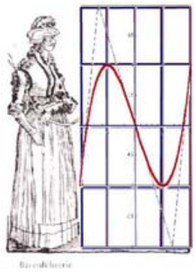
Polynome im Affenkasten



- Für jedes Polynom bis zum 4. Grad gibt es einen Kasten, in dem es angeschaut werden kann.
- Jede Potenzfunktion zeigt eine besondere Schönheit.
- Neuentdeckungen sind jederzeit möglich.

Polynome im Affenkasten

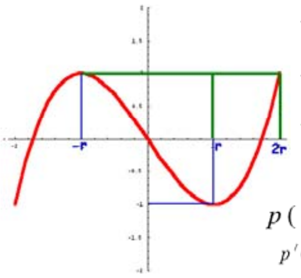
Übersicht



- Polynome 3. Grades
- Scherung als Beweisgedanke
- Parabeln im Bärenkasten
- Polynome 4. Grades im Pantherkäfig
- Potenzfunktionen
- Andere Funktionsklassen
- Entdeckendes Lernen
- Fundamentale Ideen der Mathematik und ihrer Lehre

Polynome 3. Grades im Affenkasten

- **Wir betrachten ein Polynom 3. Grades, das Extrema hat.**



- Maximum und Wendepunkt definieren eine Kastenzelle.
- Symmetrie zum Wendepunkt.
- Überraschend ist: die nächste Zelle passt immer.

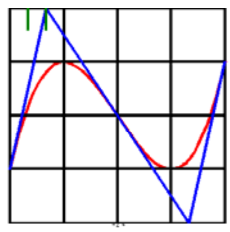
$p(x) = a\,x\,(x^2 - 3r^2)$

$p'(x) = a\,(3x^2 - 3r^2)$ o.B.d.A

$p(-r) = a\,r\,(2r^2)$ $\quad p(2r) = a\,2r\,(r^2)$

Polynome 3. Grades im Affenkasten

- **Jede Tangente schneidet die Wendetangente.**

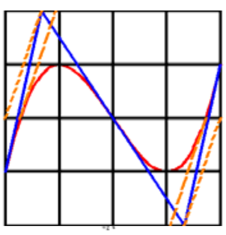


- Überraschend ist:
- Die Tangente am Kastenrand schneidet die Wendetangente auf der oberen Kastenlinie
- Der Schnittpunkt liegt immer an der 2:1 Teilungsstelle der Zelle

Polynome 3. Grades im Affenkasten

- **Die Nullstelle ist stets das $\sqrt{3}$-fache der Extremstelle.**

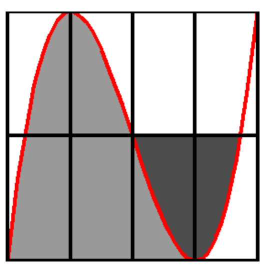
$p(x) = a\,x\,\left(x^2 - 3r^2\right)$



- Die Nullstellen -Tangente liegt also „irrational“ im Kasten.
- Sie passt nicht zu den anderen wichtigen Tangenten.
- Wirklich nicht?
- Überraschend ist:
- Sie „erbt“ ihre Steigung aus dem Kasten, m.a.W.:
- sie ist stets parallel zu einer markanten Kastenlinie.

Polynome 3. Grades im Affenkasten

- **Flächenverhältnisse** leer fertig



- Die Inhalte der gezeichneten Flächen stehen im Verhältnis 3 : 1
- Das ist einfach schön.
- Überraschend ist:
- Es ist ein rationales Flächenverhältnis, obwohl die beteiligte Nullstelle „irrational“ im Kasten liegt.

Polynome 3. Grades im Affenkasten

- **Flächenverhältnisse**

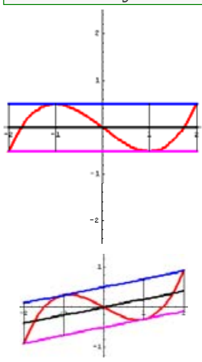
- **Flächen gleicher Farbe sind gleich groß.**

$p(x) = a\,x\,(x^2 - 3r^2)$

Ist r die Rasterbreite, so hat ein Rasterkästchen den Flächeninhalt

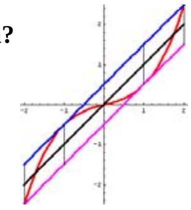
$F_K = 2\,a\,r^4$

Polynome 3. Grades im Affenkasten



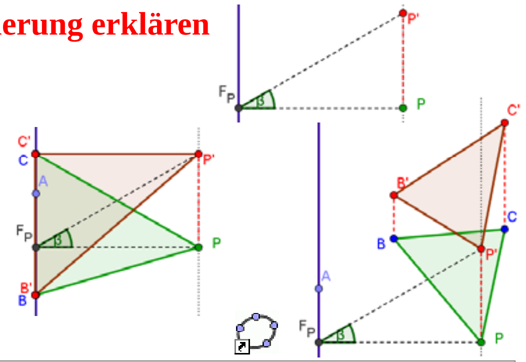
Was gilt bei anderen Polynomen 3. Grades?

- **Scherung?**
- **Wie zeigt sich Scherung im Funktionsterm?**
- **Erreicht man alle Polynome 3. Grades?**



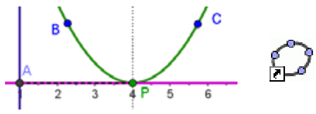
Polynome 3. Grades im Affenkasten

Scherung erklären



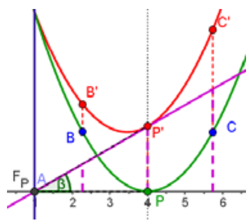
Polynome 3. Grades im Affenkasten

Scherung bei Funktionen erklären

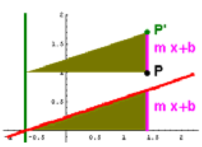


Geradenaddition bewirkt eine Scherung

Doppelte Nullstelle wird zur Berührstelle.



Polynome 3. Grades im Affenkasten

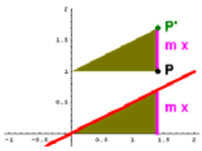


Scherung allgemein

- Addition eines linearen Terms zu einem Funktionsterm bedeutet geometrisch eine Scherung des Funktionsgraphen.

- **Scherachse** ist die Parallele zur y-Achse durch die Nullstelle der zum linearen Term gehörigen Geraden
- **Scherwinkel** ist der spitze Winkel, den die Gerade mit der x-Achse bildet.

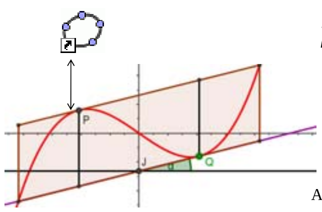
Polynome 3. Grades im Affenkasten



Scherung bei Polynomen 3. Grades

- durch Addition des Terms einer Ursprungsgeraden

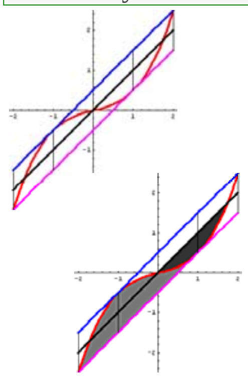
$$f(x) = a\,x^3 + b\,x$$



- **Scherachse** ist die y-Achse
- **Scherwinkel** ist der (spitze) Steigungswinkel.

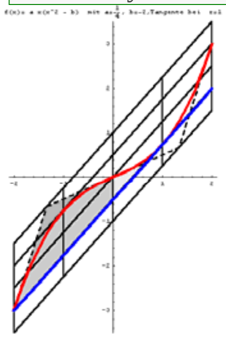
Auch in der anderen Darstellung:

Polynome 3. Grades im Affenkasten



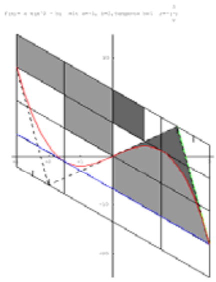
- Scherungen erhalten Teilverhältnisse und Inzidenzen
- Scherungen erhalten die Flächengröße
- Scherungen erhalten also auch die Flächenverhältnisse
- Neu ins Bewusstsein gerückt:
- Solche Scherungen erhalten die Wendestellen
- Scherungen erhalten den Grad eines Polynoms

Polynome 3. Grades im Affenkasten



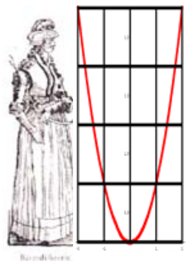
- **Also:**
- Jede Tangente definiert mit Berühr- und Wendepunkt eine Kastenzelle.
- Alle für gerade Affenkästen bewiesenen Tatsachen gelten auch für schräge Affenkästen.
- Alles gilt für alle Polynome 3. Grades.

Polynome 3. Grades im Affenkasten



- **Also:**
- Jede Tangente definiert mit Berühr- und Wendepunkt eine Kastenzelle.
- Alle für gerade Affenkästen bewiesenen Tatsachen gelten auch für schräge Affenkästen.
- Alles gilt für alle Polynome 3. Grades.

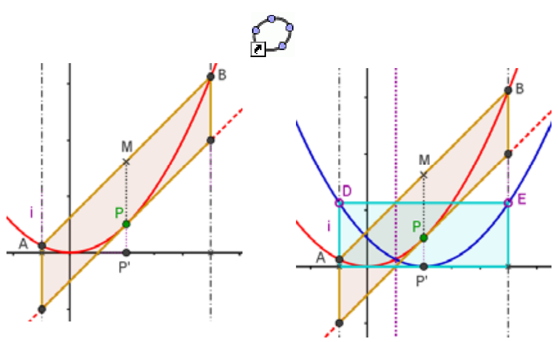
Parabeln im Bärenkasten



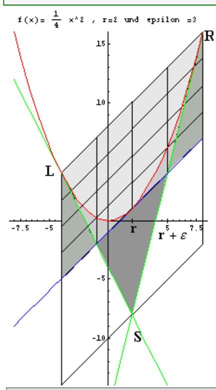
Parabeln im Bärenkasten

Gute Benennungen fördern Verstehen!

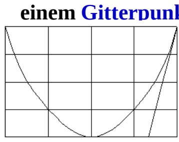
Parabeln im Bärenkasten



Parabeln im Bärenkasten

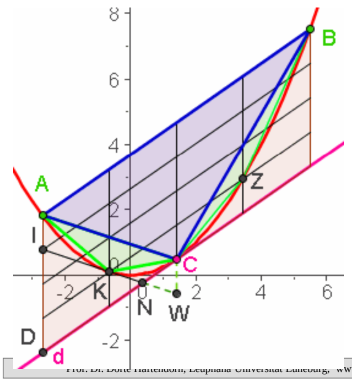


- **Die Tangenten an den Ecken des Bärenkastens:**
- **treffen die untere Kastenkante auf einem Gitterpunkt**



- **Dies kann also gar keine Parabel sein.**
- **Die beiden Tangenten schneiden sich untereinander auf der Unterkante des „Doppelkastens“**
- **Es gelten viele schöne Flächenverhältnisse**

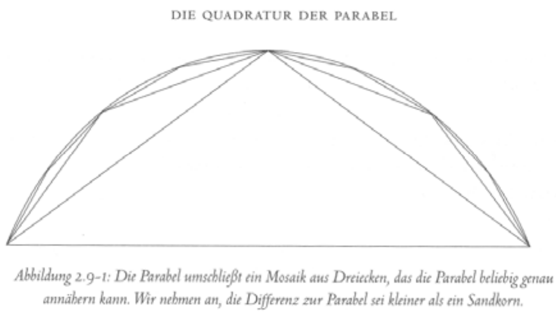
Parabeln im Bärenkasten



Die Sehne AB definiert
Ein **Parabelsegment.**
C heißt **Scheitel** des
Parabelsegmentes.

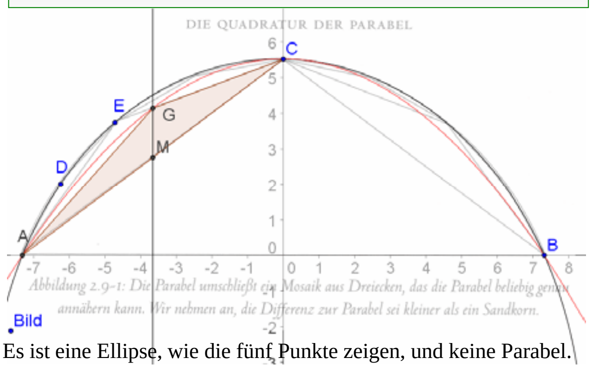
Mit einer Folge von Dreiecken hat Archimedes die Parabelfläche bestimmt.

Parabeln im Bärenkasten



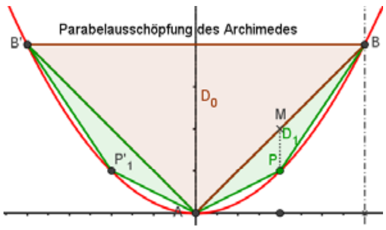
Aus dem Buch: Archimedes Palimpsest

Parabeln im Bärenkasten



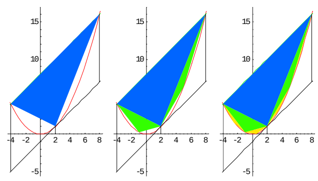
Es ist eine Ellipse, wie die fünf Punkte zeigen, und keine Parabel.
Die Parabel ist die rote Kurve. Die Dreiecke waren total falsch.

Parabeln im Bärenkasten



MP ist ein Viertel der Segmenthöhe.
Damit ist die Fläche des grünen Dreiecks ein Achtel von der des großen Dreiecks.

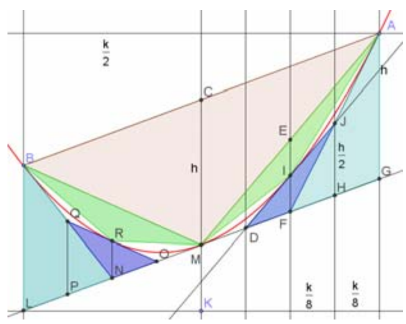
Parabeln im Bärenkasten



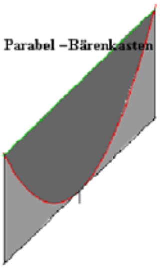
- **Archimedes und seine Parabel-Ausschöpfung**

- **Bei jedem Schritt werden neue Sehnendreiecke gebildet.**
- **Die Flächensumme der neuen Sehnendreiecke ist ¼ der vorigen.**
- **Die Gesamtflächen bilden eine Geometrische Reihe mit dem Faktor ¼ und der Summe 4/3*Startdreieck.**
- **Damit nimmt die Parabel 2/3 des Kastens ein.**

Parabeln im Bärenkasten



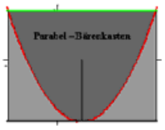
Parabeln im Bärenkasten



Offene Aufgabe
Was ist dargestellt?

offene Aufgabe

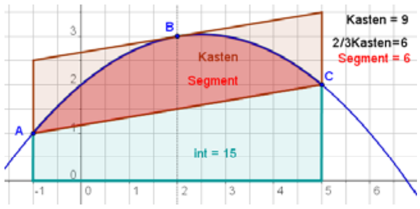
Wählen Sie eine konkrete Parabel und zeigen Sie an ihr das von Ihnen Vermutete.



Überlegen Sie, warum die von Ihnen im Spezialfall gezeigte Eigenschaft wirklich für alle Parabeln gilt.

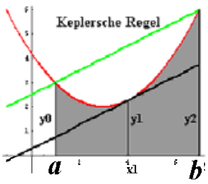
Konkreter Vorschlag: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$,
Berührstelle x=2, Gesamtbreite 12, also [-4,8]

Parabeln im Bärenkasten



- Trapez groß $\quad \frac{y_2 - y_0}{2}(b-a)$ $\quad$ Trapez groß
- Trapez klein $\quad y_1(b-a)$ $\quad$ -Trapez klein
  Parallelogramm
- Integral = Trapez groß -1/3 Parallelogramm

Parabeln im Bärenkasten



$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

exakt für Parabel
und Polynom 3. Grades

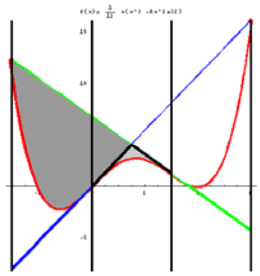
Keplersche Regel

beliebige Fkt. *f*
durch die Stützpunkte

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

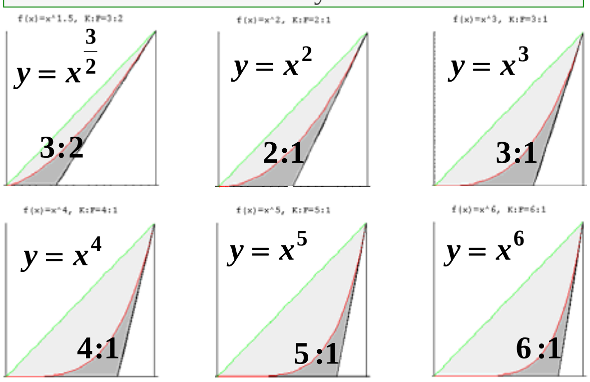
- **Johannes Kepler** (Mathematiker, Astronom) fand schon Anfang des 17. Jahrhunderts diese Keplersche (Fass-)Regel. Mehrfache Anwendung führt zur **Simpsonregel**.

Polynome 4. Grades im Pantherkäfig

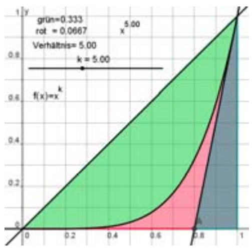


- **Polynome 4. Grades:**
  Sie haben entweder genau zwei Wendepunkte oder gar keine.
  Betrachtet werden die Graphen mit zwei Wendetangenten und deren Schnittpunkte mit dem Polynom.
- **Überraschend ist:**
- **Ist r der Abstand der Wendestellen, dann ist r auch der Abstand der Schnittstellen von den Wendestellen.**
- **Die Flächen zwischen Wendetangente und Kurve sind links und rechts gleich groß.**

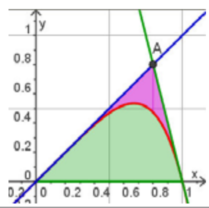
Potenzfunktionen $y=x^k$ mit k>1



Gescherte Potenzfunktionen $y=x^k +mx$ mit k>1

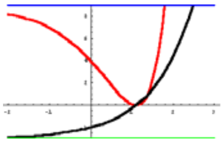


m=0



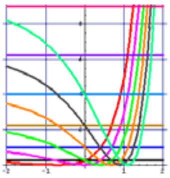
m=1

e-Funktion mit „Eulerkasten“



$f_k(x) = (e^x - k)^2 ,\ k>0$

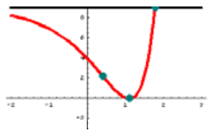
- **Entstehung des Graphen aus Bausteinen**
  - **e-Funktion um k verschieben.**
  - **quadrieren**
  - **Asymptote y= k².**
- **Bei wachsendem k wandert die Extremstelle nach außen, die Asymptote nach oben.**



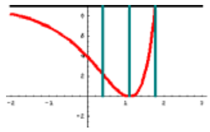
Fundamentale Idee
Funktionen aus Bausteinen aufbauen

e-Funktion mit „Eulerkasten“

$f_k(x) = (e^x - k)^2 ,\ k>0$

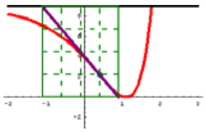


- Wendepunkt
- Extrempunkt
- Schnittpunkt mit der Asymptote
- **Überraschend ist:**



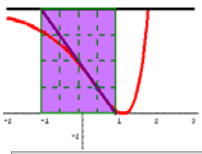
- Für alle k sind Wendestelle und Schnittstelle mit Asymptote ln 2 von der Extremstelle entfernt.
- Also: **Die Streifenbreite ist stets ln 2.**

e-Funktion mit „Eulerkasten“

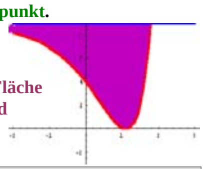


$f_k(x) = (e^x - k)^2 ,\ k>0$

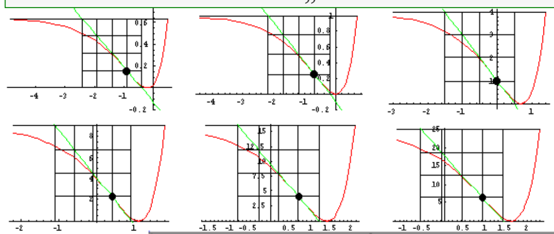
- **Die Wendetangente schneidet Asymptote und x-Achse**
- **Dadurch wird ein Kasten definiert.**
- **Überraschend ist:**
- **Für alle k hat dieser Kasten die Breite 2**
- **Der Wendepunkt liegt auf dem rechten unteren Viertelpunkt.**



- **Die Kastenfläche ist so groß wie die Fläche zwischen Kurve und Asymptote.**
- **A=2 k ²**



e-Funktion mit „Eulerkasten“

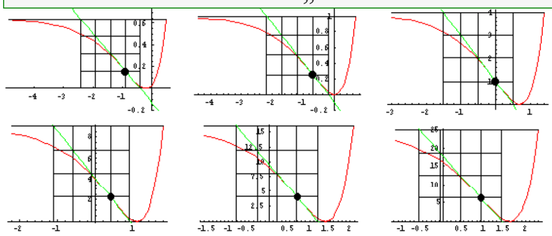


$$f_k(x) = \left(e^x - k\right)^2$$

Viele Flächen sind Vielfache der Kastenzellen.

Links unbegrenzter Bereich zwischen Kurve, Asymptote und Schnitt mit Asymptote F=16 Zellen = ganzer Kasten= 2 k²	Bereich zwischen Kurve und Asymptote zwischen Nullstelle und Schnitt mit Asymptote F=4 Zellen
Bereich zwischen Kurve und Asymptote zwischen Wendestelle und Nullstelle F=5 Zellen	Links unbegrenzter Bereich zwischen Kurve, Asymptote und Wendetangente F=5 halbe Zellen
Bereich zwischen Kurve und Asymptote zwischen Wendestelle und minus Unendlich F=7 Zellen	Links unbegrenzter Bereich zwischen Kurve, Asymptote und linker Kastengrenze (z.B.) ist inkommensurabel mit den Kastenzellen, was zeigt, dass die anderen Eigenschaften "besonders" sind.

e-Funktion mit „Eulerkasten“



Viele Flächen sind Vielfache der Kastenzellen.

Erforschen Sie mathematische Schönheiten!

Polynome im Affenkasten

- Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

www.mathematik-verstehen.de