Reihen Umordnen

- Riemann'scher Umordnungssatz: Nur in absolut-konvergenten Reihen darf man umordnen.
  Anderenfalls kann in der umgeordneten Reihe jeder Wert Grenzwert sein.

Reihe für ln2 umordnen zur Summe 2 ln2:

```
In[3]:= k = 50000;

In[4]:= g = Table[1/(2 n), {n, k}];
              Tabelle

In[5]:= u = Table[1/(2 n - 1), {n, k}];
              Tabelle

In[6]:= s = 0; i = j = 1; r = {};

In[7]:= While[i < k ∧ j < k,
        solange
          If[s < 2 Log[2], s += u[[i]]; AppendTo[r, u[[i]]^-1]; i++,
          wenn       Logarithmus               hänge an bei
            s -= g[[j]]; AppendTo[r, -g[[j]]^-1]; j++]
                         hänge an bei
        ]

In[8]:= r;

In[9]:= lr = Position[r, n_ /; n < 0] // Flatten;
             Position                     ebne ein

In[10]:= dlr = Most[lr] - Rest[lr];
               alle außer l⋯ alle außer ers

In[11]:= dlr // Union
                Vereinigung

Out[11]= {-5}
```

In[12]:=
```
ListPlot[Accumulate[1 / r] // N, Joined → True, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0}]
```
listenbez··· sammle an ··· verknüpft? wahr Koordinatenb··· alle Achsenursprung

Out[12]=

Reihe für ln2 umordnen zur Summe $\frac{1}{2}$ ln2:

Reihe für ln2 umordnen zur Summe $\frac{3}{2}$ ln2:

Reihe für ln2 umordnen zur Summe 3 ln2:

Reihe für ln2 umordnen zur Summe ln3:

Reihe für ln2 umordnen zur Summe ln5:

Reihe für ln2 umordnen zur Summe ln6:

Reihe für ln2 umordnen zur Summe ln7:

Beweis für alle Umordnungen:

Alle Umordnungen lassen sich durch lokale Vertauschungen, d.h. wenige Permutationen kurzer endlicher Teilfolgen, auf den Fall zurückführen, dass a positive Summanden von b negativen Summanden gefolgt werden, unendlich oft wiederholt.
Einfache Abschätzungen mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \simeq \ln N + \gamma$ ergeben dann für den Summenwert $\ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. Das deckt alle Fälle oben ab.

Die Umordnungen, die sich durch das greedy-Verfahren, wie oben programmiert, ergeben, sehen wie folgt aus (kann man aus obigem mit Sorgfalt herauslesen):

0 = (1+ 4-)$^\infty$,
$\frac{1}{2}$ ln(2) = (1+ 2-)$^\infty$,

$\frac{3}{2}\ln(2) = (2+\ 1-\ )^{\infty}$,

$2\ln(2) = 3+\ 1-\ (4+\ 1-\ )^{\infty}$,

$\ln(3) = 2+\ 1-\ ((2+\ 1-)^{3}+\ 1-)^{\infty}$,

$3\ln 2 = 9+\ 1-\ (16+\ 1-\ )^{\infty}$

$\ln 5\ = 4+\ 1-\ ((6+\ 1-\ )^{3}\ 7+\ 1-\ )^{\infty}$,

$\ln 6\ = 6+\ 1-\ 8+\ 1-\ (9+\ 1-\ )^{\infty}$,

$\ln 7\ = 7+\ 1-\ (12+\ 1-\ )^{2}\ 13+\ 1-\ (12+\ 1-\ )^{4}\ 13+\ 1-\ ((12+\ 1-\ )^{3}\ 13+\ 1-\ )^{\infty}$.

Die Notation gibt an, wieviele positive (+) und wieviele negative
(-) Glieder aufeinanderfolgen, Klammern mit Exponenten sind Gruppen,
die sich wiederholen.
Aus den abschließenden Klammern $(\ \ldots)^{\infty}$ kann man die Werte von a und b entnehmen und die Korrekheit obiger Formel nachprüfen.