

■ Reihen Umordnen



- Riemann'scher Umordnungssatz: Nur in absolut-konvergenten Reihen darf man umordnen.
Anderenfalls kann in der umgeordneten Reihe jeder Wert Grenzwert sein.

■ Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $2 \ln 2$:

```
In[3]:= k = 50000;
```

```
In[4]:= g = Table[ $\frac{1}{2^n}$ , {n, k}];  
[Tabelle
```

```
In[5]:= u = Table[ $\frac{1}{2^{n-1}}$ , {n, k}];  
[Tabelle
```

```
In[6]:= s = 0; i = j = 1; r = {};
```

```
In[7]:= While[i < k & j < k,  
[solange  
    If[s < 2 Log[2], s += u[[i]]; AppendTo[r, u[[i]]-1]; i++,  
    [wenn [Logarithmus [hänge an bei  
        s -= g[[j]]; AppendTo[r, -g[[j]]-1]; j++]  
    [hänge an bei  
]
```

```
In[8]:= r;
```

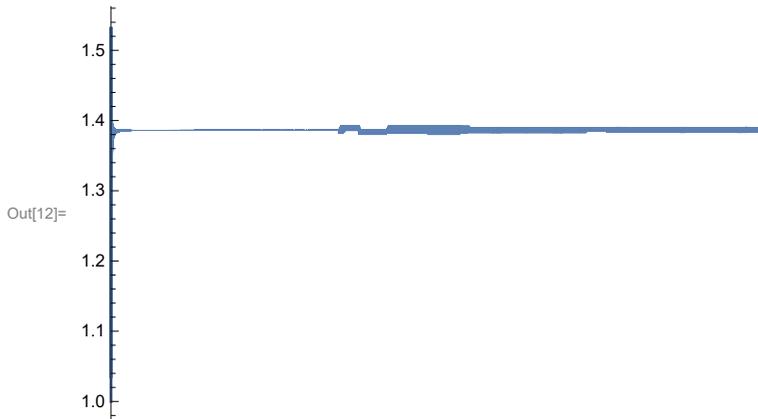
```
In[9]:= lr = Position[r, n_ /; n < 0] // Flatten;  
[Position [ebne ein
```

```
In[10]:= dlr = Most[lr] - Rest[lr];  
[alle außer 1... [alle außer ers
```

```
In[11]:= dlr // Union  
[Vereinigung
```

```
Out[11]= {-5}
```

```
In[12]:= ListPlot[Accumulate[1/r] // N, Joined -> True, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}]
[listenbez... [sammlen an] [verknüpft? [wahr] [Koordinatenb... [alle] [Achsenursprung]
```



- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $\frac{1}{2} \ln 2$:

- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $\frac{3}{2} \ln 2$:

- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $3 \ln 2$:

- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $\ln 3$:

- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $\ln 5$:

- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $\ln 6$:

- Reihe für $\ln 2$ umordnen zur Summe $\ln 7$:

- Beweis für alle Umordnungen:

Alle Umordnungen lassen sich durch lokale Vertauschungen, d.h. wenige Permutationen kurzer endlicher Teilfolgen, auf den Fall zurückführen, dass a positive Summanden von b negativen Summanden gefolgt werden, unendlich oft wiederholt.

Einfache Abschätzungen mit $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \approx \ln N + \gamma$ ergeben dann für den Summenwert

$\ln\left(2 \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. Das deckt alle Fälle oben ab.

Die Umordnungen, die sich durch das greedy-Verfahren, wie oben programmiert, ergeben, sehen wie folgt aus (kann man aus obigem mit Sorgfalt herauslesen):

$$0 = (1 + 4^{-})^{\infty},$$

$$\frac{1}{2} \ln(2) = (1 + 2^{-})^{\infty},$$

$$\frac{3}{2} \ln(2) = (2+1-)^{\infty},$$

$$2 \ln(2) = 3+1-(4+1-)^{\infty},$$

$$\ln(3) = 2+1-((2+1-)^3+1-)^{\infty},$$

$$3 \ln 2 = 9+1-(16+1-)^{\infty}$$

$$\ln 5 = 4+1-((6+1-)^3 7+1-)^{\infty},$$

$$\ln 6 = 6+1-8+1-(9+1-)^{\infty},$$

$$\ln 7 = 7+1-(12+1-)^2 13+1-(12+1-)^4 13+1-((12+1-)^3 13+1-)^{\infty}.$$

Die Notation gibt an, wieviele positive (+) und wieviele negative (-) Glieder aufeinanderfolgen, Klammern mit Exponenten sind Gruppen, die sich wiederholen.

Aus den abschließenden Klammern (...) $^{\infty}$ kann man die Werte von a und b entnehmen und die Korrektheit obiger Formel nachprüfen.