

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis 2D	1
1.1	Zahlen bitte	1
1.1.1	Aufbau des Zahlensystems	1
1.1.2	Vollständigkeit der reellen Zahlen	4
1.2	Komplexe Zahlen \mathbb{C} , Grundlagen	6
1.2.1	Komplexe Zahlen und ihre Darstellung	6
1.2.2	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	8
1.2.3	Additionstheoreme	10
1.3	Folgen und Grenzwerte	11
1.3.1	Explizit gegebene Folgen	12
1.3.2	Rekursiv definierte Folgen	14
1.3.3	Folgen von 2D-Punkten und Bildern	16
1.4	Reihen	19
1.4.1	Geometrische Reihe	19
1.4.2	Arithmetische Folge	20
1.4.3	Harmonische Reihe	21
1.4.4	Berühmte Reihen	23
1.4.5	Konvergenz und Umordnung von Reihen	24
1.5	Darstellungsvielfalt und Funktionstypen	26
1.5.1	Darstellungsvielfalt	26
1.5.2	Stetigkeit von Funktionen	29
1.5.3	Funktionstypen	30
1.5.4	Funktionen-Bauhof	40
1.5.5	Komplexe Funktionen verbiegen Gitter	46
1.6	Differentialrechnung	52
1.6.1	Steigung und Ableitung, explizit kartesisch	52
1.6.2	Implizite kartesische Ableitung	57
1.6.3	Steigung und Ableitung bei Parameter- und Polarkurven	59
1.7	Funktionen untersuchen	61
1.7.1	Lokale Extremstellen	62
1.7.2	Oszillierende Funktionen, Sinus-Wunderdinge	63
1.7.3	Krümmungen	66
1.7.4	Wendepunkte	70
1.8	Integralrechnung	70
1.8.1	Definition von Riemann und Grundlagen	71
1.8.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	72
1.8.3	Wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals	75
1.8.4	Partielle Integration und Substitutionsregel	81
1.8.5	Flächenfragen in der ganzen Darstellungsvielfalt	83
1.8.6	Fläche bei Kurven in Parameterdarstellung	84

1.8.7	Flächen bei Polarkurven	85
1.8.8	Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven	86
1.8.9	Bogenlänge bei Polarkurven	87
1.8.10	Volumen von Rotationskörpern	88
1.8.11	Uneigentliche Integrale	90
1.9	Anwendungen der Infinitesimalrechnung	91
1.9.1	Harmonie der rotierten Quadriken	92
1.9.2	Taylorreihen und Landau-Symbolik	94
1.9.3	Kriterien für lokale Extremstellen und Wendepunkte	101
1.9.4	Regel von L'Hospital	105
1.9.5	Fourierreihen	110
1.9.6	Fourier-Transformation	123
1.9.7	Laplace-Transformation	127
2	Lineare Algebra	131
2.1	Algebra und Grundlagen der linearen Algebra	131
2.1.1	Algebraische Strukturen: Gruppen, Ringe, Körper	132
2.1.2	Vektorräume	135
2.1.3	Wichtige Vektorräume: Vektorpfeile und n -Tupel	137
2.1.4	Vektorräume von Funktionen, Funktionenräume	141
2.1.5	Skalarprodukt, Norm und euklidische Vektorräume	143
2.1.6	Nützliche Begriffe in euklidischen Vektorräumen	146
2.1.7	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension	149
2.2	Analytische Geometrie	152
2.2.1	Der Punktraum \mathbb{R}^m und affine Unterräume	153
2.2.2	Der Normalenvektor und seine Rolle	154
2.2.3	Geraden im \mathbb{R}^2	157
2.2.4	Ebenen im \mathbb{R}^3	159
2.2.5	Körper in der Geometrie	161
2.3	Matrizen und Determinanten: Grundverständnis	165
2.3.1	Grundlegendes zu Matrizen	165
2.3.2	Multiplikation von Matrizen	166
2.3.3	Quadratische Matrizen	169
2.3.4	Determinanten und inverse Matrizen: Grundverständnis	171
2.4	LGS, Determinanten, Matrizen: Weiterführung	174
2.4.1	Schnitt von Ebenen, geometrische Bedeutung der Rechnung	174
2.4.2	Schnitt von Geraden, geometrische Bedeutung der Rechnung	177
2.4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS) im Überblick	178
2.4.4	Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme	180
2.4.5	Determinanten für $n \times n$ -Matrizen und ihre Berechnung	182
2.4.6	Cramer'sche Regel für LGS, inverse Matrix berechnen	185
2.4.7	Geometrische Eigenschaften mit Hilfe der linearen Algebra	186
2.4.8	Kreuzprodukt und Spatprodukt	187

- 2.4.9 Intermezzo: Division von Vektoren? 190
- 2.4.10 Rechnen: Von Hand oder mit dem Computer? 192
- 2.5 Lineare Abbildungen und Matrizen 193
 - 2.5.1 Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen 193
 - 2.5.2 Lineare Abbildungen in der Ebene verformen Gitter 205
 - 2.5.3 Eigenwerte und -vektoren der Matrizen linearer Abbildungen 206
- 2.6 Orthogonalität 209
 - 2.6.1 Orthogonalprojektionen 210
 - 2.6.2 Orthogonalisierungsverfahren 216
- 2.7 Quadriken und Hauptachsentransformation 218
 - 2.7.1 Allgemeine Gleichungen der Quadriken (Kegelschnitte) im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 219
 - 2.7.2 Diagonalisierung von Matrizen 222
 - 2.7.3 Singulärwertzerlegung einer Matrix (SVD) 225
 - 2.7.4 Hauptachsentransformation für Kegelschnitte 231
 - 2.7.5 Eine Anwendung aus der Physik 236
 - 2.7.6 Hauptachsentransformation für 3D-Quadriken 239
 - 2.7.7 3D-Quadrikgleichungen in Hauptlage 242
 - 2.7.8 Regelflächen 245
- 3 Analysis 3D** 247
 - 3.1 Funktionen 247
 - 3.2 Differentialrechnung 3D 249
 - 3.2.1 Tangentialebenen 250
 - 3.2.2 Richtungsableitung, Gradient und Jacobi-Matrix 256
 - 3.2.3 Kettenregel für mehrere Veränderliche 261
 - 3.2.4 Mehrfache partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz 265
 - 3.2.5 Divergenz und Rotation in Vektorfeldern 267
 - 3.3 Optimierung einer Funktion zweier Veränderlicher 274
 - 3.3.1 Taylorpolynome einer Funktion zweier Veränderlicher 275
 - 3.3.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema 276
 - 3.3.3 Mehr als zwei Veränderliche 278
 - 3.3.4 Optimierung mit Nebenbedingungen nach Lagrange 279
 - 3.4 Integrale 3D 284
 - 3.4.1 Mehrdimensionale Integrale begreifen und berechnen 284
 - 3.4.2 Integration mit Koordinatentransformation 290
 - 3.4.3 Gauß'scher Satz über Quellen und Flüsse 294
 - 3.4.4 Satz von Stokes 302
- 4 Differentialgleichungen DGLn** 307
 - 4.1 Einführung in DGLn 307
 - 4.2 Ein weiter Blick über die DGLn 309
 - 4.3 Gewöhnliche DGLn, Grundlagen 311
 - 4.3.1 Typen von Differentialgleichungen (DGLn) 311
 - 4.3.2 Richtungsfelder 312

4.3.3	Isoklinen	317
4.3.4	Phasenraumdiagramme	318
4.4	Anfangswert-Probleme und Eindeutigkeit von Lösungen	325
4.4.1	Anfangswertprobleme	325
4.4.2	Lösungsraum von linearen DGLn	328
4.5	Laplace-Transformationen	329
4.5.1	Lösungen suchen in einer anderen Welt	329
4.5.2	Lineare DGLn mit konst. Koeff. und Laplace-Transformation	331
4.5.3	Homogene lineare DGL und Laplace-Transformation	333
4.5.4	Partialbruchzerlegung bei der Laplace-Transformation	334
4.5.5	Die Laplace-Rücktransformation \mathcal{L}^{-1}	336
4.5.6	Struktur der Lösungen von homogenen linearen DGLn	337
4.5.7	Inhomogene lineare DGL	339
4.5.8	Laplace-Transformation für periodische Funktionen	340
4.5.9	Werkzeugunterstützung	344
4.5.10	Edelstein: Euler'sche Formel	345
4.5.11	Lösungen ausgewählter DGLn	347
4.6	Systeme von DGLn	349
4.6.1	DGL-System beim gekoppelten Pendel	350
4.6.2	Allgemeine Systeme von DGLn	352
4.6.3	Autonome, lineare Systeme	354
4.6.4	2-dimensionale lineare Systeme	358
4.6.5	Inhomogene Systeme von DGLn	362
4.6.6	Nichtlineare Systeme von DGLn	363
4.7	Partielle DGLn	366
4.7.1	Schwingende Saite	367
4.7.2	Erste Lösung der Schwingungsgleichung	368
4.7.3	Randbedingungen	369
4.7.4	Zweite Lösung der Schwingungsgleichung	370
4.8	PDGLn 1. Ordnung	372
4.8.1	Visualisierung und Lösung quasi-linearer PDGLn 1. Ordnung	372
4.8.2	Die charakteristischen Kurven	374
4.8.3	Cauchy-Anfangsbedingungen und Charakteristiken	375
4.8.4	Lösung durch Potenzreihenentwicklung	378
4.9	PDGLn 2. Ordnung	379
4.9.1	Charakteristiken und drei Typen von PDGLn	380
4.9.2	Charakteristiken als neue Koordinatenlinien	381
4.9.3	Eigenschaften und Beispiele	382
5	Numerik	387
5.1	Numerische Fehler	387
5.1.1	Fehlerarten und Ursachen	388
5.1.2	Instabilität	388

- 5.2 Nullstellensuche 391
 - 5.2.1 Bisektion und Intervallschachtelung 391
 - 5.2.2 Sekantenverfahren 391
 - 5.2.3 Newtonverfahren 392
 - 5.2.4 Iteration, Fixpunkt und Konvergenz 393
 - 5.2.5 Heronverfahren 396
- 5.3 Interpolation und Kurven gestalten 398
 - 5.3.1 Interpolation mit Polynomen 398
 - 5.3.2 Interpolation mit kubischen Splines 402
 - 5.3.3 Kurvengestaltung mit Béziersplines 407
 - 5.3.4 Raumflächengestaltung mit Bézierflächen 410
- 5.4 B-Splines und NURBS 411
 - 5.4.1 Béziersplines auf einem größeren Parameterintervall 412
 - 5.4.2 B-Splines 413
 - 5.4.3 Gestaltung mit NURBS, Teil 1 417
 - 5.4.4 NURBS, Teil 2, mit nicht uniformen B-Splines 427
- 5.5 Numerische Integration 431
 - 5.5.1 Kepler’sche Regel 432
 - 5.5.2 Simpson’sche Regel 436
 - 5.5.3 Weitere Verfahren 438
 - 5.5.4 Numerische Raumintegrale 445
- 5.6 DGLn numerisch lösen 448
 - 5.6.1 Eulerverfahren 450
 - 5.6.2 Heunverfahren 454
 - 5.6.3 Numerische Integration liefert Verfahren für DGLn 458
 - 5.6.4 Runge-Kutta-Verfahren 460
 - 5.6.5 Skuriles zur exakten Lösung von $y' = y^2 - x$ 461
 - 5.6.6 Weitere Methoden und Aspekte 463
- 6 Geometrie und Werkzeuge 469**
 - 6.1 Geometrie 469
 - 6.1.1 Besondere Punkte im Dreieck 469
 - 6.1.2 Kreiswinkelsätze 470
 - 6.1.3 Trigonometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck 471
 - 6.1.4 Satzgruppe des Pythagoras 472
 - 6.1.5 Cosinussatz 473
 - 6.1.6 Konstruktion wahrer Längen und Winkel für Körper 473
 - 6.2 Geometrische Aspekte der komplexen Zahlen 474
 - 6.2.1 Kreisspiegelung, Inversion am Kreis 474
 - 6.2.2 Riemann’sche Zahlenkugel 475
 - 6.3 Werkzeuge 476
 - 6.3.1 GeoGebra 476
 - 6.3.2 Weitere hilfreiche Tipps 478

Literaturverzeichnis 479

Sachverzeichnis 483