

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis 2D	1
1.1	Zahlen bitte	1
1.1.1	Aufbau des Zahlensystems	1
1.2	Komplexe Zahlen \mathbb{C} , Grundlagen	6
1.2.1	Komplexe Zahlen und ihre Darstellung	6
1.3	Folgen und Grenzwerte	11
1.3.1	Explizit gegebene Folgen	11
1.3.2	Rekursiv definierte Folgen	13
1.3.3	Folgen von 2D-Punkten und Bildern	15
1.4	Reihen	18
1.4.1	Geometrische Reihe	19
1.4.2	Harmonische Reihe	20
1.4.3	Berühmte Reihen	22
1.4.4	Konvergenz und Umordnung von Reihen	24
1.5	Darstellungsvielfalt und Funktionstypen	25
1.5.1	Darstellungsvielfalt	25
1.5.2	Stetigkeit von Funktionen	28
1.5.3	Funktionstypen	30
1.5.4	Funktionen-Bauhof	39
1.5.5	Komplexe Funktionen verbiegen Gitter	45
1.6	Differentialrechnung	51
1.6.1	Steigung und Ableitung, explizit kartesisch	51
1.6.2	Implizite kartesische Ableitung	56
1.6.3	Steigung und Ableitung bei Parameter- und Polarkurven	58
1.7	Funktionen untersuchen	60
1.7.1	Lokale Extremstellen	61
1.7.2	Oszillierende Funktionen, Sinus-Wunderdinge	62
1.7.3	Krümmungen	65
1.7.4	Wendepunkte	69
1.8	Integralrechnung	69
1.8.1	Definition von Riemann und Grundlagen	70
1.8.2	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	71
1.8.3	Wichtige Eigenschaften des bestimmten Integrals	74
1.8.4	Partielle Integration und Substitutionsregel	77
1.8.5	Flächenfragen in der ganzen Darstellungsvielfalt	79
1.8.6	Fläche bei Kurven in Parameterdarstellung	80
1.8.7	Flächen bei Polarkurven	81
1.8.8	Bogenlänge bei Funktionen und Parameterkurven	82
1.8.9	Bogenlänge bei Polarkurven	83
1.8.10	Volumen von Rotationskörpern	84

1.8.11	Uneigentliche Integrale	86
1.9	Anwendungen der Infinitesimalrechnung	88
1.9.1	Harmonie der rotierten Quadriken	88
1.9.2	Taylorreihen und Landau-Symbolik	91
1.9.3	Kriterien für lokale Extremstellen und Wendepunkte	97
1.9.4	Regel von L'Hospital	102
1.9.5	Fourierreihen	107
1.9.6	Fourier-Transformation	120
1.9.7	Laplace-Transformation	123
2	Lineare Algebra	127
2.1	Algebra und Grundlagen der linearen Algebra	127
2.1.1	Algebra	127
2.1.2	Vektorräume	131
2.1.3	Wichtige Vektorräume: Vektorpfeile und n -Tupel	133
2.1.4	Vektorräume von Funktionen, Funktionenräume	137
2.1.5	Skalarprodukt, Norm und euklidische Vektorräume	139
2.1.6	Nützliche Begriffe in euklidischen Vektorräumen	142
2.1.7	Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension	145
2.2	Analytische Geometrie	148
2.2.1	Der Punktraum \mathbb{R}^m	149
2.2.2	Der Normalenvektor und seine Rolle	150
2.2.3	Geraden im \mathbb{R}^2	154
2.2.4	Ebenen im \mathbb{R}^3	155
2.2.5	Körper in der Geometrie	157
2.3	Matrizen und Determinanten: Grundverständnis	161
2.3.1	Grundlegendes zu Matrizen	161
2.3.2	Multiplikation von Matrizen	163
2.3.3	Quadratische Matrizen	165
2.3.4	Determinanten und inverse Matrizen: Grundverständnis	167
2.4	LGS, Determinanten, Matrizen: Weiterführung	169
2.4.1	Schnitt von Ebenen, geometrische Bedeutung der Rechnung	170
2.4.2	Schnitt von Geraden, geometrische Bedeutung der Rechnung	173
2.4.3	Lineare Gleichungssysteme (LGS) im Überblick	173
2.4.4	Homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme	176
2.4.5	Determinanten für $n \times n$ -Matrizen und ihre Berechnung	177
2.4.6	Cramer'sche Regel für LGS, inverse Matrix berechnen	180
2.4.7	Geometrische Eigenschaften mit Hilfe der linearen Algebra	181
2.4.8	Kreuzprodukt und Spatprodukt	183
2.4.9	Rechnen: Von Hand oder mit dem Computer?	186
2.5	Lineare Abbildungen und Matrizen	186
2.5.1	Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen	187
2.5.2	Lineare Abbildungen in der Ebene verformen Gitter	192

- 2.5.3 Eigenwerte und -vektoren der Matrizen linearer Abbildungen 193
- 2.6 Orthogonalität 196
 - 2.6.1 Orthogonalprojektionen 196
 - 2.6.2 Orthogonalisierungsverfahren 200
- 2.7 Quadriken und Hauptachsentransformation 203
 - 2.7.1 2D-Quadriken (Kegelschnitte) und 3D-Quadriken 204
 - 2.7.2 Diagonalisierung von Matrizen 206
 - 2.7.3 Hauptachsentransformation für Kegelschnitte 209
 - 2.7.4 Hauptachsentransformation für 3D-Quadriken 215
 - 2.7.5 3D-Quadrikgleichungen in Hauptlage 218
 - 2.7.6 Regelflächen 220
- 3 Analysis 3D** 223
- 3.1 Funktionen 223
 - 3.1.1 3D-Funktionstypen und Darstellungsarten 224
- 3.2 Differentialrechnung 3D 225
 - 3.2.1 Tangentialebenen 227
 - 3.2.2 Richtungsableitung, Gradient und Jacobi-Matrix 232
 - 3.2.3 Kettenregel für mehrere Veränderliche 237
 - 3.2.4 Mehrfache partielle Ableitungen 241
 - 3.2.5 Divergenz und Rotation in Vektorfeldern 243
- 3.3 Optimierung einer Funktion zweier Veränderlicher 250
 - 3.3.1 Taylorpolynome einer Funktion zweier Veränderlicher 251
 - 3.3.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrema 252
 - 3.3.3 Mehr als zwei Veränderliche 254
 - 3.3.4 Optimierung mit Nebenbedingungen nach Lagrange 255
- 3.4 Integrale 3D 260
 - 3.4.1 Mehrdimensionale Integrale begreifen und berechnen 260
 - 3.4.2 Integration mit Koordinatentransformation 266
 - 3.4.3 Gauß'scher Satz über Quellen und Flüsse 270
 - 3.4.4 Satz von Stokes 278
- 4 Differentialgleichungen DGLn** 283
- 4.1 Einführung in DGLn 283
- 4.2 Ein weiter Blick über die DGLn 285
- 4.3 Gewöhnliche DGLn, Grundlagen 287
 - 4.3.1 Typen von Differentialgleichungen (DGLn) 287
 - 4.3.2 Richtungsfelder 288
 - 4.3.3 Isoklinen 293
 - 4.3.4 Phasenraumdiagramme 294
- 4.4 Anfangswert-Probleme und Eindeutigkeit von Lösungen 301
 - 4.4.1 Anfangswertprobleme 301
 - 4.4.2 Lösungsraum von linearen DGLn 304
- 4.5 Laplace-Transformationen 305

4.5.1	Lösungen suchen in einer anderen Welt	305
4.5.2	Lineare DGLn mit konst. Koeff. und Laplace-Transformation	307
4.5.3	Homogene lineare DGL und Laplace-Transformation	309
4.5.4	Partialbruchzerlegung bei der Laplace-Transformation	310
4.5.5	Die Laplace-Rücktransformation \mathcal{L}^{-1}	312
4.5.6	Struktur der Lösungen von homogenen linearen DGLn	313
4.5.7	Inhomogene lineare DGL	315
4.5.8	Laplace-Transformation für periodische Funktionen	316
4.5.9	Werkzeugunterstützung	320
4.5.10	Edelstein: Euler'sche Formel	321
4.5.11	Lösungen ausgewählter DGLn	323
4.6	Systeme von DGLn	325
4.6.1	DGL-System beim gekoppelten Pendel	326
4.6.2	Allgemeine Systeme von DGLn	328
4.6.3	Autonome, lineare Systeme	330
4.6.4	2-dimensionale lineare Systeme	333
4.6.5	Inhomogene Systeme von DGLn	338
4.6.6	Nichtlineare Systeme von DGLn	339
4.7	Partielle DGLn	343
4.7.1	Schwingende Saite	343
4.7.2	Erste Lösung der Schwingungsgleichung	344
4.7.3	Randbedingungen	345
4.7.4	Zweite Lösung der Schwingungsgleichung	347
5	Numerik	349
5.1	Numerische Fehler	349
5.1.1	Fehlerarten und Ursachen	350
5.2	Nullstellensuche	353
5.2.1	Bisektion und Intervallschachtelung	353
5.2.2	Sekantenverfahren	353
5.2.3	Newtonverfahren	354
5.2.4	Iteration, Fixpunkt und Konvergenz	355
5.2.5	Heronverfahren	358
5.3	Interpolation und Kurven gestalten	360
5.3.1	Interpolation mit Polynomen	360
5.3.2	Interpolation mit kubischen Splines	364
5.3.3	Kurvengestaltung mit Béziersplines	369
5.3.4	Raumflächengestaltung mit Bézierflächen	373
5.4	B-Splines und NURBS	374
5.4.1	Béziersplines auf einem größeren Parameterintervall	374
5.4.2	B-Splines	375
5.4.3	Gestaltung mit NURBS	378
5.5	Numerische Integration	381

- 5.5.1 Kepler’sche Regel 382
- 5.5.2 Simpson’sche Regel 386
- 5.5.3 Weitere Verfahren 389
- 5.5.4 Numerische Raumintegrale 395
- 5.6 DGLn numerisch lösen 398
 - 5.6.1 Eulerverfahren 401
 - 5.6.2 Heunverfahren 404
 - 5.6.3 Numerische Integration liefert Verfahren für DGLn 409
 - 5.6.4 Runge-Kutta-Verfahren 410
 - 5.6.5 Skurriles zur exakten Lösung von $y' = y^2 - x$ 412
 - 5.6.6 Weitere Methoden und Aspekte 413
- 6 Geometrie und Werkzeuge 419**
 - 6.1 Geometrie 419
 - 6.1.1 Besondere Punkte im Dreieck 419
 - 6.1.2 Kreiswinkelsätze 420
 - 6.1.3 Trigonometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck 421
 - 6.1.4 Satzgruppe des Pythagoras 422
 - 6.1.5 Cosinussatz 423
 - 6.1.6 Konstruktion wahrer Längen und Winkel für Körper 423
 - 6.2 Geometrische Aspekte der komplexen Zahlen 424
 - 6.2.1 Kreisspiegelung, Inversion am Kreis 424
 - 6.2.2 Riemann’sche Zahlenkugel 425
 - 6.3 Werkzeuge 426
 - 6.3.1 GeoGebra 426
 - 6.3.2 Weitere hilfreiche Tipps 428
- Literaturverzeichnis 429**
- Sachverzeichnis 431**